A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGHY KONYVTÁR SZOLNOK X 2

Szükséges-e szemléletváltás az új technológiák megjelenésével a matematikaoktatásban

(Ambrus Gabriella)

A középiskolai matematika kerettantervekről és alkalmazásukról

(Honti Dénes)

Varázslatos sokszögek II.

(Z. P. Dienes)

IX. ÉVFOLYAM 2001 1

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 980 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

Szükséges-e szemléletváltás az új technológiák megjelenésével a matematikaoktatásban?
Ambrus Gabriella főiskolai adjunktus, Budapest

A középiskolai matematika kerettantervekről és alkalmazásukról
Honti Dénes tanár, Győr

Varázslatos sokszögek II.
Z. P. Dienes professzor, Kanada

Az 1997-1999. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák (AHSME) feladatai és megoldási kulcsai II.
Dr. Kántor Sándorné adjunktus, Debrecen

Hírek

Feladatrovat tanároknak

Hát, nem tudom...
(A szegedi Rátz László Vándorgyűlés záródolgozata)
Csorba Ferenc szaktanácsadó, Győr

Harmadfokú függvények szélsőérték vizsgálata elemi módon
Árokszállási Tibor tanár, Paks

Az általános talpponti háromszög területe
Dr. Darvasi Gyula docens, Nyíregyháza

Matematika tankönyvcsalád az első osztálytól az érettségiig
Sokszínű matematika 1-12.

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

SZOLNOK

Ambrus Gabriella

Szükséges-e szemléletváltás az új technológiák megjelenésével a matematikaoktatásban?

Az „új technológia" kifejezés a jelenlegi szóhasználatban számológép, számítógép, internet, ill. az ezekkel kapcsolatos lehetőségek megjelölésére szolgál.

Technológia – görög eredetű szó (technikos) – jelentése: „1. Mindazon módszerek és eljárások összefoglaló elnevezése, amelyek révén nyers-, ill. alapanyagokból ipari készítményeket állítanak elő; 2. valamely termék gyártási eljárásainak összessége; 3. *rég, isk.* felsőfokú ipariskola" [1]

A mai, legalábbis oktatásbeli szóhasználatot figyelembevéve csak némi belemagyarázással lehet kapcsolatot teremteni az idézett „technológia" értelmezéssel, ugyanis ebben olyan jelentések, hogy „szemléltetőeszköz", „segédeszköz" vagy hasonló nem szerepel. A „technológia" szónak találtam más értelmezését is, de az előbbi jelentések ott sem szerepeltek. (vö. pl. [3])

Az „új technológia" megjelölés az említett mai szóhasználatban eléggé elterjedt, de találkoztam már „új technikák" szóhasználattal is, ugyanebben az értelemben. Érdekes lenne utánajárni – ha egyáltalán lehet –, mikor, miért jelent meg az „új technológia" fogalom, ezzel azonban ebben a tanulmányban nem foglalkozunk.

Ha a fogalmi megjelölés vitatható is, kétségtelen, hogy az új technológiák jelen vannak, és körük egyre inkább bővül, az oktatásban (is).

A címben feltett kérdést két további kérdés segítségével szeretném átgondolni, néhány szempontot adva ezzel a személyes válaszhoz.

- Mit jelent új technológiákat használni, hogyan illeszthető ez be életünkbe és az iskolai oktatásba?
- Mi az igazán új? Tényleg annyira új?

1.kérdés
Mit jelent új technológiákat használni, hogyan illeszthető ez be életünkbe és az iskolai oktatásba?

1. *Varga Tamás* 1980-ban [2] a következőképpen világította meg a kérdéskör lényegét: „...mit mondhatnánk , ha valaki kijelentené, hogy közlekedni csak kétféleképpen lehet: gyalog vagy lovon? Bizonyára azt, hogy emberünk elmaradt a kortól, a honfoglalás korába képzeli magát! Aki lovaskocsira, gőzösre, kerékpárra is gondol, az még mindig el van maradva száz évvel. Az elektronikus számolás-és számítástechnikában most tízszer olyan gyors a fejlődés: ugyanígy el van maradva az, aki a gépi számolást nem sorolja a számolási készségekhez."

Kutzler (1999), a matematika (intellektuális) és a közlekedés (fizikai) eltérő világát hasonlítja össze bizonyos szempontból, és így keresi az új technológiák helyét, szerepét. A következő gondolatokhoz ezt vettem alapul.

A mozgás legalapvetőbb módszere a *járás*. Ekkor csupán saját izomerőt veszünk igénybe. A sétálás megfelelője lehet a matematikában a *fejben végzett műveletek* köre. Ekkor csak az agyunkat használjuk.

A *kerékpározás* során már mechanikai eszközt is igénybe veszünk, hogy izomerőnk hatását fokozzuk. A sétáláshoz képest így nagyobb távolságra könnyebben és gyorsabban juthatunk el. A kerékpározásnak a matematikában a *papír-ceruza segítségével végzett számítások* feleltethetők meg. A papír és a ceruza külső segítségei agyunknak, hatékonyabbá teszik teljesítőképességét.

A mozgás következő lehetőségének Kutzler az *autózást* vette. Az autó olyan „fortélyos" szerkezet, amely mozgást „produkál". A vezetőnek

szinte nincs is szüksége izomerőre a vezetéshez, de szüksége van bizonyos készségekre: tudni kell beindítani a motort, gyorsítani, váltani, fékezni, alkalmazkodni a forgalomhoz és a váratlan eseményekhez. Ennek megfelelő tevékenység lehet a matematikában a *számoló/számítógéppel végzett számítás*.

Ez utóbbiak során ugyanis sokféle művelet elvégezhető, mégpedig igen gyorsan, de a felhasználónak tudnia kell használni az eszközöket, mégpedig, akárcsak a vezetőnek a vezetésnél, megfelelően kell eljárnia az adott helyzetekben.

Melyik mozgási módszert milyen szituációban használjuk?

Ha leugrunk egy újságért mondjuk 250 m-re, valószínűleg gyalog megyünk. Ha azonban az újságos 1000 méterre van, már inkább kerékpárt választunk .Ha viszont a vásárláshoz már 10 000 m-t kell megtennünk, akkor inkább autóba ülünk. (Az egyéni lehetőségek persze befolyásolják a járművválasztást...)

A matematikában hasonló példákat sorolhatunk fel a számítások elvégzésével kapcsolatban: Két egyjegyű számot fejben szorzunk összse. két kétjegyű szám összeszorzásához már sok esetben papírt, ceruzát veszünk elő. Két négyjegyű összeszorzásánál pedig már gyakran nyúlunk inkább a számológép után.

Persze van, aki a 7×9-t is géppel számolja. Ez éppen olyan, mintha a 250 m-re levő újságoshoz autón mennénk. Aki így tesz, az nemcsak környezetét károsítja (kipufogógáz), hanem magának is árt (testmozgás hiánya). Hasonlóan felsorolhatók a túlzott számoló/számítógép használat káros következményei is (pl. műveletek, becslés képességének hiánya alakulhat ki).

Itt még azonban nincsen vége az előbbi analógiáknak. Mert vegyük például azt az embert, aki eltörte a lábát, vagy születése óta tolókocsiban él. Neki a 250m megtétele is gondot jelent eszköz nélkül. Ehhez hasonló példa a matematikában is található: vannak akik bizonyos számítások elvégzésében gyengébbek, vagy esetleg még ismereteik szintje nem éri el a feladat kivitelezéséhez szükséges szintet, noha egyébként esetleg kiváló megoldási ötleteik vannak. Ilyenkor bizony hamarabb kerül elő a számológép. A számoló/számítógép éppenúgy emberi fogyatékosságok állandó vagy időszakos segítője lehet, mint a tolókocsi vagy az autó.

Az új technológiák felhasználása esetén az előbbiek alapján tehát két alapvető lehetőséget különböztethetünk meg:

1. automatizálás
2. kompenzálás

1. Elsődlegesen az *„automatizálás"* jutna eszünkbe, ha számító/számológép kerül szóba. Noha már a sokat emlegetett számolások elvégzése sem igazán automatikus. Meg kell gondolnunk például az elvégzendő műveletek sorrendjét, esetleg a szám alakját, nem is beszélve például a grafikus kalkulátorokon történő függvényábrázolásról, amikor meg kell terveznünk többek között a képernyőt is ahhoz, hogy használható függvénygrafikont kapjunk.

2. A „kompenzálás" pedig nem csak valamilyen feltűnő, normálistól eltérő hiányosság korrigálása lehet.

Mint a korábbi szorzásos példa már említette, két négyjegyű szám összeszorzása már meghaladja a képességeinket (eltekintve a speciális esetektől és a speciális képességű emberektől).

De kompenzálásról beszélhetünk akkor is, amikor *például a Cabri-geometria* program segítségével valamilyen ábrát készítünk, és a „húzó(vonszoló)-modus" segítségével helyzetek(szerkesztések) egész sorozatát vizsgálhatjuk meg. Papír-ceruza rajzzal ezt nemigen tudnánk elérni, s ha mégis , akkor valószínűleg igen sokáig tartana, és persze várhatóan pontatlanabb is lenne a rajzunk.

Az említett esetekben az új technológiai lehetőségek a normál emberi képességeket egészítik ki; olyan hiányosságokat kompenzálnak, amelyek feladatelvégzése során jelentkeznek.

Életkori, tudásszintbeli lehetőségek köre bővülhet azonban, ha például nyolcadik osztályban géppel másodfokú egyenletet oldhatunk meg, ha valamelyik feladatnál ilyenre esetleg szükség van.

Itt persze rögtön érkezhet az ellenvetés, hogy majd néhány év múlva úgyis megtanulja

a gyerek a megoldóképletet, minek bajlódni. A dolog azonban nem ilyen egyszerű. Gondoljuk csak meg, van-e valami haszna annak, ha nem állunk meg minden olyan esetben, ahol az ismeretszint még nem megfelelő, hanem keresünk lehetőséget a továbblépésre.

Van, mégpedig igen jelentős. Ennek révén a gyerekben kialakul, illetve továbbfejlődik az a képesség, ami alkalmassá teszi arra, hogy a valódi szituációk esetében is a megoldásra, a nehézségek leküzdésére törekedjen. Elvégre a köznapi életben sem lehet mindig arra hivatkozni, hogy ezt még nem tanultam...

A következőben a geometriában használható dinamikus software-k elődeit idézzük meg.

A dinamikus szemlélet a geometriában mindig is fontos szerepet játszott. Számos olyan eszköz készült már századokkal ezelőtt is, amelyek ezt tükrözik.

A dinamikus geometria software-k, mint például a Cabri-programcsalád, a Thales vagy a Geolog, arra tanítanak, hogy a vizuális élménynél fontosabb az elemek közötti kapcsolat a rajzon. Mindamellett adott kérdéskör vizsgálatánál érdemes elgondolkodni ,valóban szükség van-e rájuk. Éppen ezért jó, ha nem feledkezünk meg más eszközök használatának bemutatásáról sem hallgatóknak és diákoknak egyaránt.

Ennek szép példája olvasható Vásárhelyi Évánál: Példa régi és új eszközök együttes alkalmazására: Feladatlapok az inverzorhoz. [4]

Az előbbiekben azt próbáltam bizonyítani, hogy ezek az „új technológiák" nem is olyan szokatlanul újak, beleillenek életünkbe, egy fejlődés eredményeinek tekinthetők, egy olyan fejlődésé, amelynek értékeit nem kell és nem is szabad a továbbiakban elvetnünk.

2.kérdés:
Mi az igazán új? Tényleg annyira új?

1. Megjelenés
   eltérnek a korábbi eszközöktől, más a működésük is, mint a hagyományos szemléltetőeszközöknek.

2. Számos új lehetőség
   pl. bonyolult számítások gyors elvégzése, sokadfokú egyenletek könnyed kezelése, gombnyomásra függvények, (grafikus kalkulátor), mozgatható, esetenként trükkös ábrák, elrejtett és újra előhívható részletekkel (pl. dinamikus geometria software-k [DGS])

3. Új bizonyítási formák
   (pl. a DGS hatására).

Itt érdemes egy kis kitérőt tenni, mit is jelent ez utóbbi.

A **bizonyítás** a matematikában Euklidesz óta szigorúan deduktív, formális eljárás.

A matematikaoktatásban azonban érvényre kell jutnia a bizonyítás egy másik fontos jellemzőjének is, és ez a „megértés" jelleg. A meg nem értett bizonyítások a matematika tanulása során nemcsak hatástalanok, hanem károsak is, hiszen ezek a matematikát paradox módon értelmetlen szabályok betanulásának tárgyává teszik, (tehetik).

A bizonyítás a matematikaoktatásban inkább a „megindoklást" jelenti, s különböző szinteknek megfelelően különböző ún. *bizonyítási fajták* különíthetők el. A következőkben Elschenbroich (1998) tanulmánya alapján egy lehetséges „bizonyítási fajta" besorolást ismertetek.

1. kísérleti bizonyítás

Ebben az esetben véges számú példán keresztül kerül igazolásra az állítás. Természetesen szó sincs a hagyományos értelemben vett általános érvényű bizonyításról.

2. tartalmi-szemléletes bizonyítás

Az 1.-től lényegesen különbözik. Tevékenységhez kapcsolódik, pl. szerkesztések, műveletek végzése, amelyek során intuitíven felismerhető, hogy az előbbi műveletek nemcsak adott példákra, hanem bizonyos „példacsaládokra" is alkalmazhatók, s ebből következtetések is adódnak. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a tartalmi szemléletes bizonyítások olyan (korrekt) következtetések, amelyek nem formális premisszákon alapulnak, hanem valamilyen gyakorlati megfigyelésen.

3. Formális (tudományos) bizonyítás
a „hagyományos" bizonyítás

A DGS alkalmazása során az 1. és 2. típusba tartozó bizonyítások köre tovább gazdagod-

hat. Az előbbi 1. típusba sorolható az ún. *„dinamikus invariancia"* bizonyítás. Ebben az esetben arról van szó, hogy a mozgatás során a gyerekek gyakran átélnek bizonyos invariancia helyzeteket, melyek számukra a mozgatások révén szerzett tapasztalatok miatt nyilvánvalóak. A Thalesz-tétel „bizonyításához" könnyen készíthető megfelelő ábra pl. Cabri-geometria program segítségével. A MÉRTANI HELY funkcióval kirajzolódó körvonal adja az említett „invariáns"-t.

A 2. típusba sorolhatók az ún. *„vizuális-dinamikus"* bizonyítások. Ezek már bizonyos értelemben általánosnak tekinthetők. Ugyanis nem csupán valamely „állandó" megfigyeléséről van szó, hanem a „miért van ez így" kérdésre is ad valamilyen választ. Például segédvonalak berajzolásával, illetve szimmetrialehetőségek meggondolásával. Ezek abban az értelemben „bizonyítások", hogy választ próbálnak adni a „miért"-re, és mert „józan" érveléssel megingathatatlanok.

Természetesen felmerül az elfogadhatósággal kapcsolatban a kritériumok kérdése. Nyilvánvaló, hogy ez függ például a korosztálytól (hetedikes kor előtt hagyományos bizonyítás nem is várható el – gyakran később sem – a gyerekektől), vagy a feladat nehézségi fokától (nem lenne elég az eddigi ismeret a tökéletes bizonyításhoz).

Az előbbi példánknál maradva, (Thalesztétel) ilyen típusú bizonyításról beszélhetünk, ha a gyerekek a Cabri-program segítségével például berajzolják a derékszögű csúcs és az átfogó felezőpontját összekötő szakaszt, és megfigyelik, hogy ez a mozgatás során állandó hosszúságú, majd megfogalmazzák, hogy a derékszögű csúcs az említett felezőpont középpontú, „berajzolt szakasz" sugarú körvonalon van.

Az eddigiek alapján a tárgyalt bizonyításokat a következőképpen foglalhatjuk össze:

Evidencia „bizonyítások"
- kísérleti „bizonyítások"
- dinamikus invariancia „bizonyítások"

Preformális bizonyítások
- tartalmi szemléletes bizonyítások
- vizuális-dinamikus bizonyítások

Formális (tudományos) bizonyítások

Természetesen további bizonyításfajták is elkülöníthetők (vö. [5]).

4. tananyag tartalmának változása
- régi tananyaghoz próbáljuk hozzáilleszteni az új lehetőségeket
  Például Cabri-feladatlapok készítése a hagyományos geometriaanyaghoz.
- bizonyos anyagrészek részben vagy teljesen kiesnek, helyettük más lép be.
  Például számítások részletes és gyors kézi elvégzése háttérbe szorul, nő a val. szám. és a statisztika jelentősége

Az utóbbihoz hasonló jelenséggel már többször találkozhattunk a matematikaoktatás történetében. Például a XIX. század végefelé kezdődő matematikatanítási reformmozgalom hatására a középiskolai matematika-tananyag esetében nagy kérdés volt többek között, hogy legyen vagy ne legyen benne a differenciál és integrálszámítás.

Mostanában például aktuális kérdésként jelentkezik, hogy „mennyi" számtanra van szükségünk ahhoz, hogy algebrát tanulhassunk, melyek azok a számolási készségek, amelyek feleslegessé válnak a számológép/számítógép alkalmazásával.

Valóban szemléletváltásra van szükségünk, nem csupán továbbfejlődésre és a lehetőségek ésszerű kihasználására mint eddig is?

Irodalom

[1] Bakos Ferenc: Idegen szavak és kifejezések szótára Akadémiai K./Kossuth Kiadó 1984

[2] Varga T.: Számolás fejben, írásban, géppel Élet és Tudomány , 1980 179-181 old.

[3] http://www.kutzler.com/a-pt/ped-tool.html (1999)

[4] Vásárhelyi Éva: A számítógép a matematika oktatásában (kézirat) 1998 ELTE TTK Matematika Szakmódszertani Csoport

[5] Elschenbroich, Hans-Jürgen: Anschaulich(er) Beweisen mit dem Computer Megjelent a: Kadunz/Ossimitz/Peschek/Schneider/Winkelmann (szerk): Matematische Bildung und neue Technologien kötetben, 61.-69. old. B.G.Teubner Stuttgart . Leipzig ,1999

Honti Dénes

A középiskolai matematika kerettantervekről és alkalmazásukról

A tárgy aktualitása és behatárolása

A gyakorló matematika tanárok hozzászoktak, hogy az utóbbi évtizedben egyre újabb és újabb, egymást felül – valójában inkább – alulíró tervezetek születtek tárgyunk tanításával kapcsolatban. Némi sajnálattal tapasztaltam, hogy a tervek szerzőinek közleményein, tájékoztatóin túl a mindennapi gyakorlat részéről igen kevés vélemény jelent meg a szaklapokban. Látnunk kell, hogy a közelmúltban olyan dokumentumok készültek el, kerültek elfogadásra és kihirdetésre, melyek – jól vagy rosszul – de várhatóan évtizedekig meg fogják határozni munkánk kereteit.

Jelen rövid cikkben az érettségire készítő középiskolák 9-12. évfolyamaira vonatkozó matematika kerettantervekkel, a tanítás ezeken alapuló tervezésével kívánok foglalkozni. Más évfolyamok, iskolatípusok problematikáját csak a témám szempontjából szükséges mértékben fogom érinteni.

A középiskolai matematika kerettantervekről

A tanárok többsége helyeselte, hogy a NAT két-két évfolyamra megadott követelményeit évekre lebontó, az anyagot, a tantervi követelményeket, a tanulói tevékenységeket, az elérendő ismereteket és képességeket pontosabban meghatározó dokumentum, azaz kerettanterv készüljön. Különösen szükség volt erre a 11. és a12. évfolyamon, ahol a tanítást csak az eléggé nagyvonalúan megfogalmazott általános érettségi követelmények szabályozták.

A matematika kerettantervek elkészítésekor azonban nem csak lebontás és részletezés történt, a kerettantervek átírták, csökkentették a NAT és a középszintű matematika érettségi maximalistának semmiképp sem nevezhető követelményeit.

A NAT és a középszintű érettségi matematika anyagáról megállapítható, hogy mértéktartó, a hagyományok és a modernizálás meggondolt egyensúlyán alapszik, nemzetközi összehasonlításban inkább konzervatívnak és mérsékeltnek tekinthető. A hosszas egyeztetési eljáráson, lehető konszenzuson alapuló, kormányrendelettel kihirdetett anyagok – egészen más célú – kerettantervvel való érdemi csökkentése nem szerencsés. Már pedig ez történt, hiszen a kerettantervből hiányzik például tananyagként a pontkörüli elforgatás, a másodfokú egyenletrendszer, az addíciós tételek témaköre, a nagy számok törvényének szemléletes tartalma.

Az igazi problémát azonban az óraszámok jelentik.

Először is a kerettanterv ugyanarra a középszintű matematika érettségi vizsgára való felkészüléshez a gimnazistáknak a négy évre összesen 13, (3,3,3,4), a szakközépiskolásoknak összesen 12, (3,3,3,3) órát irányoz elő. Ez teljességgel ésszerűtlen, hiszen a szakközépiskolába belépők nagy átlagban gyengébben felkészültek gimnazista társaiknál, és immorális is a szakközépiskolásokkal szemben, mivel a hátránnyal indulókat versenyezteti nehezebb feltételek között. Ilyen különbségtétel semelyik más kötelező érettségi tárgynál sincs, józan ész szerint a matematikában sem maradhat.

Másodszor a középiskola 9. osztálya számára megállapított heti 3 matematika óra nem elegendő a különböző felkészültséggel jött tanulókból összeálló, kezdő kilencedikes osztályok nagy többségében a középiskolai matematika tanulás megalapozására, a szükséges rutinok kialakítására. Az elkészült tananyagbeosztások, tanmenet javaslatok számomra mind ezt bizonyítják. Így a Fővárosi Közoktatás Fejlesztési Közalapítvány támogatásával megrendezett

2000 őszi Matematika Konferencia anyagaként megjelent „Javaslat" a 9. évfolyamon a lineáris egyenletek megoldásának áttekintésére 2, a nevezetes azonosságokra 4, az algebrai törtekre szintén 4 órát szán. Meggyőződésem, hogy ennek a javaslatnak a követése a biztos eredménytelenséget alapozná meg az osztályok többségében.

A matematika tárgy egy sajátossága: a rutinok fontossága

Tárgyunk jellemzője, hogy a benne való továbbhaladáshoz a későbbiekben eszközszerűen használható biztos készségek, röviden rutinok kialakítására van szükség. A tanításnak egyrészt célja ezek elsajátíttatása, másrészt feltétele, hogy a tanulók a továbblépéshez szükséges rutinokkal rendelkezzenek. Biztos elemi képességek rendszere nélkül a matematika tanítása illuzórikus.

A matematikának természetesen van más oldala is. Mindenekelőtt már kezdő szinten is a kutató-kereső, felfedező, problémamegoldó jellege, fogalomalkotásainak a gyakorlati élettel való kapcsolata, eljárásainak a természettudományokban, a műszaki, a gazdasági és a mindennapi életben való alkalmazhatósága, építkezésének, vagy inkább felépítésének deduktív volta. Az elemi rutinok megfelelő szintje nélkül ezeken a – napjainkban oly sokszor említett – területeken is megoldhatatlan a diákok fejlesztése.

Melyek a középfokú haladáshoz szükséges legfontosabb rutinok?

A racionális számokkal való műveletek, az elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása, a másodfokú egyenletek megoldása, az elemi algebrai kifejezések átalakításai, azaz a hatványozás azonosságainak és a nevezetes azonosságoknak az alkalmazásai, a geometriai transzformációk végrehajtása, valamint egy általánosabb képesség: egyszerű, írott szövegeknek a megértése és algebrai formákba vagy ábrákba konvertálása.

Ezek kialakítása jórészt a 9. évfolyamon történik, és gyakorlást, több oldalú alkalmazásokat, időt kíván.

Az érvényes tantervek ismeretében azt mondhatnánk, hogy a felsorolt elemek nagy részét a diákok már az általános iskolában megtanulták. A mindennapi tanári tapasztalat azonban azt mutatja, hogy a kilencedikben középiskolába lépők nagy többsége nem rendelkezik elfogadható szinten a szükséges rutinokkal.

A Győr – Moson - Sopron MPI 2000 tavaszán reprezentatív felmérést végzett matematikából a megyei 8. osztályok körében. A szereplő egyszerű elsőfokú, törtes egyenlet megoldásában a résztvevő kb. 350 nyolcadikos kerekítve 55%-os teljesítményt nyújtott, azaz a megoldásban megkülönböztetett 5 item alapján elérhető pontok 55%-át érte el. A szokásos, elsőfokú egyenletre vezető szöveges feladatban a teljesítmény 20,5% volt. Úgy gondolom, tartalmában és szintjében a tantervnek megfelelő feladatokat tűztünk ki, és más megyében, vagy városban sem kaptunk volna lényegesen jobb eredményt. Vajon erre a biztonságra lehet alapozni a továbbhaladást? A középiskola 9. osztályában nem történhet a „lineáris egyenletek megoldásának áttekintése" egy-két órában, hanem az elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, a szöveges feladatok megoldásának megtanítása, begyakoroltatása jelentős időkeretben.

Az algebrai átalakításokat illetően még kevesebb a megbízható hozott ismeret. A kerettantervek szerint az általános iskolában csökken a matematikára fordítható idő, így nem várhatunk javulást.

Az eddigiek alapján azt gondolhatná valaki, hogy a heti 3 óra csak a gyenge, esetleg az átlagos felkészültségű osztályok problémája. Szó sincs erről! A jobbak ugyan a 11. évfolyamon fognak bekapcsolódni az emelt szintű vizsgára való felkészítésbe, de munkájukat a kezdő évfolyamokon kell megalapozni. Például az analízis tanításának előkészítéséhez szükség van a valós számhalmaz alaposabb megismerésére, a valós függvények jellemzésére szolgáló fogalmak elfogadható szintű megfogalmazására, az összetettebb, a szokatlan függvények elemi vizsgálatára; másrészt bonyolultabb egyenletek megoldása, bonyolultabb kifejezések átalakítása során biztosabb algebrai rutinok kialakítására. Külön említendők az egyenlőtlenségek, az abszolút értékes, és a törtes egyenlőtlenségek, az évfolyamon csak grafikusan megoldható egyenlőtlenségek és mindenek előtt az összetettebb szövegek megértésének, vázlatba, táblázatokba, egyenletbe, ábrába foglalásának képessége. Mondhatjuk, hogy a jobbak további fejlesztéséhez talán még jobban kell az idő, mint a tájékozatlanok hiányainak pótlására. Ne feledjük azt

sem, hogy a felkészültebbek és a jobb adottságúak korántsem bizonyosan ugyanazok.

A 9. évfolyamon a heti 3 óra a 6 vagy 8 osztályos gimnáziumba járó, értelmes, jól felkészített, a matematikával a középiskola után foglalkozni nem kívánó diákoknak lehet elég.

Az emelt szintű érettségi helyzete

A kerettanterv sajnálatos módon nem foglalkozik az emelt szintű érettségre való felkészítés tervezésével. Ez találgatásokra ad lehetőséget az emelt szintű követelmények csökkentését, esetleg a benne szereplő kiegészítő „modern" fejezetek törlését illetően.

Szeretném leszögezni, hogy a jelenlegi emelt szintű matematika érettségi követelmények nemzetközi összehasonlításban egyáltalán nem magasak. Talán sehol sincs matematikát is használó felsőfokú továbbtanulásra előkészítés az analízis, a statisztika és a valószínűségszámítás elemeinek tanítása nélkül. Igen súlyos hibának és visszalépésnek tartanám, ha az emelt szintű matematikára szánt többletidőt, az értelmes tanuló energiáit az elmélyítés jelszavával egyszeri használatra szóló ad hoc elemi eljárások, a magyar felvételi rendszeren kívül sehol, – a felsőfokú matematikában a legkevésbé – szereplő, minél több log-, gyök- és szögfüggvényjelet alkalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek megoldására fordítanánk.

Nem. A matematika felsőfokú tanulására készülőket a középfokon lehetséges szemléletes szinten meg kell ismertetni a főbb fejezetek alapvető fogalmaival, gondolataival, egyszerűbb eljárásaival. Meg kell azt is jegyezni, hogy néhány fogalmilag megalapozatlan megközelítés nem pótolja az analízis elemeinek tanítását, ugyanígy az elemi kombinatorika néhány alkalmazása sem pótolja a valószínűségszámítás és a statisztika elemeinek kifejtését.

Más kérdés, hogy lehetőleg minden alkalmas érdeklődőt minél több egyedi ötletet kívánó feladattal, a továbbiakban használható ötlettel ismertessünk meg, bevonva őket a szakköri munkába, az esetleges kiscsoportos vagy egyéni foglalkozásokba.

Az emeltszintű kiegészítő anyagokkal kapcsolatban a feladat a tanításukra való minél jobb felkészülés, így feldolgozásuk mielőbbi részletes megtervezése. Körülbelül egy évtizedes távlatban elő kell készíteni a komplex számok, a lineáris algebra és a struktúra elmélet elemeinek bevonását az emelt szintű érettségi követelményei közé.

Örömömre általános az egyetértés abban, hogy a 11. és a 12. évfolyamon az emeltszintű vizsgára való felkészüléshez heti 2,2 többletóra szükséges. Nem mindegy azonban, hogy az emelt szintre készülők az összes órájukat külön csoportban kapják, vagy az eredeti 3, esetleg 4 órájukat osztályukban, középszintű vizsgára készülő társaik körében. Csak a teljesen külön csoportban, egy tanár tervezésével és irányításával végzett munka biztosíthatja a nehéz vizsgára való megfelelő felkészülést.

Mi a teendő?

A távlati cél csak egy lehet: a 9-12. évfolyamon heti 4,4,3,3 matematika óra biztosítása minden középszintű érettségire készülőnek, a közeljövőben pedig a gimnáziumban és a szakközépiskolában egyaránt minimálisan heti 4 óra a 9. évfolyamon. Ezek a célok elérhetőek, de csak egyetlen módon: a matematikus és a matematika tanári társadalom egységes fellépésével, nagy nevek és tömegek megszólaltatásával. A megfelelő fellépés megszervezésére a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottsága hivatott.

Az átmeneti időszakban minden munkaközösségnek helyi harcot kell vívnia, hogy lehetőleg a szabadon tervezhető órák keretéből, szerencsétlenebb esetben a nem kötelező foglalkozások keretéből időhöz jusson a hiányokkal küzdők és a matematikában haladni kívánók – a két halmaz nem mindig diszjunkt – más-más jellegű, de egyaránt fontos felkészítésére.

A helyi tantervek elkészítésekor javaslom lehetőleg 20, de legalább 12 óra tervezését az elsőfokú egyenletek, ezekhez vezető szöveges feladatok témakörére, és hasonló óraszámot az algebrai azonosságok, átalakítások, algebrai törtek tanítására. Természetesen ugyanazt a témakört osztályonként a helyi tanulói lehetőségek és igények szerint fogjuk kitölteni feladatanyaggal.

Írásom egy mondatos összefoglalása: bármely tiszteletreméltó helyi tantervjavaslatot félretéve, ne sajnáljuk az időt a későbbiekben igazán szükséges dolgokra.

Z. P. Dienes

Varázslatos sokszögek II.

Magasabb rendű szorzók páratlan oldalú sokszögek esetén

Mindeddig a szorzókat arra használtuk, hogy a bekarikázott számok többszöröseit állítsuk elő belőlük. Egy bekarikázott szám helyettesíthető egy másik bekarikázott számmal, azzal a számmal, amely a sokszög egy szimmetriatengelye mentén való átfordítás során (térbeli 180°-os forgatás a szimmetriatengely körül) kerül a szám helyére. De mi történhet a szorzók szorzásakor? Hogyan szorzódnak ezek a szorzók a különböző átfordítások során? Ha találunk egy számot, amely valamely eddigi szorzónkat megszorozza a forgatás során, akkor találhatunk egy másodrendű szorzót. Azok a számok, amelyek a bekarikázott számokat szorozzák, az elsőrendű szorzók, sőt magukat a bekarikázott számokat nulladrendű szorzóknak is tekinthetjük. Természetesen a másodrendű szorzókat még tovább szorozhatjuk további forgatások (átfordítások) során, az így kapott számok lesznek a harmadrendű szorzóink. Ezt az utat addig folytathatjuk, míg vissza nem kapjuk az elsőrendű szorzókat.

A következőkben a különböző rendű szorzókat oszlopokba fogom írni, és ahogy az egyik szorzótól a másikig jutunk a következő tengelyhez való forgatás során, a megfelelő számok majd a sorokban jelennek meg. Minden sornak lesz egy szorzója, amely a következő azonos rendű szorzót fogja adni, amely egy irányba egy forgatást jelent, és egy másik szorzója, amely az előző azonos rendű szorzót adja majd, amely az ellentétes irányba való forgatást jelenti.

Néhány érdekes szempont alapján az oszlopokban szereplő számok között kapcsolatot találhatunk. A szorzók sorról sorra meghatározott, szigorú szabály szerint változnak. Például, ha a hétszög esetében tekintjük a szorzók változását sorról sorra, meg kell vizsgálnunk, hogy a

36, 29, 43, 15, 22, 8

számok hogyan viselkednek. Ha ezeket a számokat felírjuk 7-es alapú számrendszerben, könnyebben láthatjuk a szabályt:

$51_{\text{hét}}, 41_{\text{hét}}, 61_{\text{hét}}, 21_{\text{hét}}, 31_{\text{hét}}, 11_{\text{hét}}$

ahol a következő sorozatot láthatjuk

5, 4, 6, 2, 3, 1

ahol minden elemet az előző elemből kaphatunk úgy, hogy az előzőt megszorozzuk 5-tel (mod 7). Hogy a sorozatot visszafele kapjuk meg, 3 (mod 7)-tel szorzunk.

A hét elemből álló testnek van egy hat elemből álló multiplikatív csoportja, melynek minden tagja szerepel a fenti sorozatban. Ha helyben maradunk, akkor (× 1) szorzót használjuk. Ha balról jobbra haladunk, akkor (× 5)-tel, ha jobbról balra, akkor (× 3)-mal szorozzuk az elemeket. Ha balról jobbra haladunk, de egy elem kihagyásával, akkor (× 4), jobbról balra egy elem kihagyásával pedig (× 2) a szorzó, és végül két elem kihagyásával (bármelyik irányban!) (× 6)-tal szorzunk. Ne felejtsük el, hogy ezeket a többszörösöket mod 7 kell érteni! Így valamilyen furcsa módon a hét elemből álló test el van rejtve a szabályos hétszög forgatásai, szimmetriái között.

Hasonló összefüggéseket találunk a háromszög és az ötszög esetében is. A kilencszög esetében, amely a 3-szor 3-as csoporttal van kapcsolatban (matematikusok Galois-csoportként ismerhetik!), hármas ciklusok szerepelnek, nem pedig kilencesek!

A háromszög szorzói
1. lap

számok	1	4	7
X	2	8	5
X^2	7	1	4
X^3	7	1	4
X^4	1	1	1

2. lap

számok	2	5	8
X	5	8	2
X^2	4	1	7
X^3	4	1	7
X^4	1	1	1

Érdemes megjegyezni, hogy minden oszlopban $X + X^2 = 9$, és hogy minden esetben $X^2 = X^3$ és $X^4 = 1$.

Minden sorban, kivéve az utolsót, $\times 4$ (mod 9) számmal megszorozva a szorzót, a sor következő szorzóját kapjuk az első lapon, míg a másik lapon $\times 7$ (mod 9) számmal kell szoroznunk.

Vegyük észre, hogy $4 = (1 \times 3 + 1)$ és hogy $7 = (2 \times 3 + 1)$.

Az $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ciklust a $\times 2$ (mod 3) ismételt szorzással generáljuk.

Az ötszög szorzói

1. lap

számok	1	6	11	16	21
X	3	23	18	13	8
X^2	14	19	24	4	9
X^3	6	16	1	11	21
X^4	16	21	1	6	11
X^5	21	11	1	16	6
X^6	11	6	1	21	16

2. lap

számok	3	13	23	8	18
X	17	12	7	2	22
X^2	9	4	24	19	14
X^3	21	11	1	16	6
X^4	11	6	1	21	16
X^5	6	16	1	11	21
X^6	16	21	1	6	11

Érdekes megfigyelni, hogy az oszlopok (X^3, X^4, X^5, X^6) minden esetben olyan ciklust alkotnak, hogy a ciklus bármely két egymást követő tagjának szorzata egyenlő a ciklus azon tagjával, mely a két egymást követő tag második tagja után következik.

Egy sor két egymást követő tagjának különbsége vagy 5, vagy 10. Az utolsó négy sor mindegyik sor számát megkaphatjuk az előző sor számából megszorozva ugyanazzal a szorzóval.

Az első lapon:
Az X^3 sorban a szorzó $11 = (2 \times 5 + 1)$
Az X^4 sorban a szorzó $6 = (1 \times 5 + 1)$
Az X^5 sorban a szorzó $16 = (3 \times 5 + 1)$
Az X^6 sorban a szorzó $21 = (4 \times 5 + 1)$

A második lapon:
Az X^3 sorban a szorzó $16 = (3 \times 5 + 1)$
Az X^4 sorban a szorzó $21 = (4 \times 5 + 1)$
Az X^5 sorban a szorzó $11 = (2 \times 5 + 1)$
Az X^6 sorban a szorzó $6 = (1 \times 5 + 1)$

A $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ sorozatot úgy kapjuk, hogy 3 (mod 5)-tel szorozzuk a tagokat egymás után, hasonlóan az $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ sorozatot kapjuk 2 (mod 5)-tel.

A $21 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 16 \rightarrow 21$ ciklust tekinthetjük az $1 \rightarrow 21 \rightarrow 16 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ ciklus egy „szorzási ciklusának", amelyet egy „összeadási ciklusnak" is tekinthetünk a következő okok miatt:

Az „összeadási ciklust" mod 5 összeadásként felismerhetjük a következőkben $1 \rightarrow 21 \rightarrow 16 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 1$, (a tagokat 21 (mod 25)-tel való szorzással generálhatjuk) $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$, melyet az egymást követő tagokból 1 (mod 5) hozzáadásával kaphatunk, amely azt jelenti, hogy a „szorzási ciklust" a következőképpen ismerhetjük fel:

$$21 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 16 \rightarrow 21$$
$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

amelyet az egymást követő tagokból 3 (mod 5) szorzásával kapunk.

Így a szerepelt számok öt elemből álló testet alkotnak, mivel a „szorzás" természetesen disztributív művelet az összeadásra nézve. Remélhetőleg nem zavarodnak össze teljesen a szorzással definiált „összeadás" hallatán!

Álmélkodva jegyzem meg, hogy a „szorzásokat" a következő „összeadásokból" kaphatjuk meg: vonjunk ki 10-et, vonjunk ki 5-öt, adjunk hozzá 10-et, adjunk hozzá 5-öt stb.

A hétszög szorzói

1. lap

számok	1	8	15	22	29	36	43
X	2	23	44	16	37	9	30
X^2	37	44	2	9	16	23	30
X^3	16	2	37	23	9	44	30
X^4	9	37	16	44	23	2	30
X^5	23	16	9	2	44	37	30
X^6	44	9	23	37	2	16	30

2. lap

számok	2	37	23	9	44	30	16
X	25	32	39	46	4	11	18
X^2	4	39	25	11	46	32	18
X^3	46	25	4	32	11	39	18
X^4	11	4	46	39	32	25	18
X^5	32	46	11	25	39	4	18
X^6	39	11	32	4	25	46	18

Egy sorban az egymást követő tagok közti különbség 7-nek mindig ugyanaz a többszöröse, vagyis vagy mindig 7, vagy mindig 14, vagy mindig 21 (amikor a különbség 28, az ugyanaz az eset, mint amikor a különbség 21, csak a másik irányba haladva tekintjük a különbséget és így tovább).

Ahhoz, hogy az első lapon szereplő sorszámot megkapjuk az előző sorokból, az X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6 sorokból a következő szorzókat használjuk:

$$36 = (5 \times 7 + 1), \quad 29 = (4 \times 7 + 1),$$
$$43 = (6 \times 7 + 1), \quad 15 = (2 \times 7 + 1),$$
$$22 = (3 \times 7 + 1), \quad 8 = (1 \times 7 + 1)$$

ahol az 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5 sorozat 5 (mod 7)-tel való szorzással generálódik, ugyanakkor a megfordítottja: 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5 sorozat 3 (mod 7)-tel való szorzással generálható.

Ahhoz, hogy a 2. lapon lévő sorszámot megkapjuk az előző sorokból az 1. lapon szereplő esetnek megfelelően, a következő szorzókat használjuk:

$$15 = (2 \times 7 + 1), \quad 22 = (3 \times 7 + 1),$$
$$36 = (5 \times 7 + 1), \quad 29 = (4 \times 7 + 1),$$
$$43 = (6 \times 7 + 1)$$

ahol ugyanazok a sorozatok használhatóak a szorzók generálására: 2, 3, 1, 5, 4, 6 sorozat 5 (mod 7)-tel való szorzással generálható, és a 6, 4, 5, 1, 3, 2 sorozat a 3 (mod 7)-tel való szorzással generálható.

Itt újra találkozunk a „szorzási ciklussal": $16 \to 9 \to 23 \to 44 \to 2 \to 37 \to 16$ az „additív sorozattal" együtt: $30 \to 16 \to 2 \to 37 \to 23 \to 9 \to 44 \to 30$, amely 7-ciklusaként a következő $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 0$ (1 hozzáadása (mod 7)), mely hatására a „szorzási ciklus" a következőképpen alakul: $16 \to 9 \to 23 \to 44 \to 2 \to 37 \to 16$ (mely 43 (mod 49)-cel való szorzással generálható). $1 \to 5 \to 4 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1$, amelyet 5 (mod 7)-tel való szorzással generálhatunk. Így ez a ciklus disztributív az „összeadási ciklusra" vonatkozóan, így ez a 7 számunk alkotja a 7 elemű testet.

A kilencszög szorzói

1. lap

N	1	10	19	28	37	46	55	64	73
X	2	47	11	56	20	65	29	74	38
X^2	61	70	79	7	16	25	34	43	52
X^3	16	79	61	43	25	7	70	52	34
X^4	25	61	16	52	7	43	79	34	70
X^5	7	16	25	34	43	52	61	70	79
X^6	43	25	7	70	52	34	16	79	61
X^7	52	7	43	79	34	70	25	61	16
X^8	34	43	52	61	70	79	7	16	25
X^9	70	52	34	16	79	61	43	25	7
X^{10}	79	34	70	25	61	16	52	7	43

2. lap

N	2	65	47	29	11	74	56	38	20
X	41	50	59	68	77	5	14	23	32
X^2	4	22	40	58	76	13	31	49	67
X^3	76	40	4	49	13	58	22	67	31
X^4	13	4	76	67	58	49	40	31	22
X^5	58	76	13	31	49	67	4	22	40
X^6	49	13	58	22	67	31	76	40	4
X^7	67	58	49	40	31	22	13	4	76
X^8	31	49	67	4	22	40	48	76	13
X^9	22	67	31	76	40	4	49	13	58
X^{10}	40	31	22	13	4	76	67	58	49

Egy sorban az egymást követő számok közti különbség mindig 9 ugyanazon többszöröse. Érdekes azt is megjegyezni, hogy az 1. lap szorzói táblázatában egy sor minden számát a sorban előtte szereplő számból kaphatjuk meg mindig ugyanazzal a számmal szorozva az egyes sorokban. Ezek a számok pedig:

64 az X, X^4, X^7, X^{10} sorokra (vagyis $7 \times 9 + 1$)
37 az X^2, X^5, X^8 sorokra (vagyis $4 \times 9 + 1$)
10 az X^3, X^6, X^9 sorokra (vagyis $1 \times 9 + 1$)

A $7 \to 4 \to 1 \to 7$ sorozatot a 7 (mod 9)-cel való szorzással generálhatjuk, míg az $1 \to 4 \to 7 \to 1$ sorozatot a 4 (mod 9)-cel való szorzással generálhatjuk.

A 2. lapon a megfelelő sorokra vonatkozó számok, amelyekkel szoroznunk kell az egyes sorokban, a következők:

$$19 = (2 \times 9 + 1), \quad 46 = (5 \times 9 + 1),$$
$$73 = (8 \times 9 + 1)$$

A $2 \to 5 \to 8 \to 2$ sorozatot a 7 (mod 9)-cel való szorzással generálhatjuk, míg a $2 \to 8 \to 5 \to 2$ sorozatot pedig a 4 (mod 9)-cel való szorzással generálhatjuk.

Egy kicsit nehezebb már, hogy valamilyen szabályt találjunk abban, ahogy az oszlopok egymás után következnek. Valamit azért mégis észrevehetünk, de ehhez meg kell változtatnunk a sorrendet, méghozzá

(1) 1 lépés felfelé
(2) 2 lépés lefelé
(3) 5 lépés lefelé

felfelé haladva minden oszlopnál, és ezt az utat folytatva 9 „mozgáson" át. Ekkor minden számot az előzőből kaphatunk vagy 45-öt hozzáadva, vagy 19-cel megszorozva, természetesen mindig (mod 81) számolva.

Tehát a következő sorozatot kapnánk: $4 \to 49 \to 13 \to 58 \to 22 \to 67 \to 31 \to 76 \to 40 \to 4$.

Ha 10 (mod 81)-gyel végigszorozzuk a sorozatot, a következő ciklust kapnánk: $4 \to 40 \to 76 \to 31 \to 67 \to 22 \to 58 \to 13 \to 49 \to 4$, ahol minden tag az előző 36-szorosa.

Vagy ha nem akarjuk ilyen bonyolultan vizsgálni, akkor 54 ismételt hozzáadásával, vagy 55-tel való sorozatos szorzással (természetesen mod 81 számolva), mindig 3-as ciklusokat kapunk, ahol 3 művelet elvégzése után mindig a ciklus első számát kapjuk vissza. Vagyis a ciklusok: $4 \to 58 \to 31 \to 4$ vagy $40 \to 13 \to 67 \to 40$ vagy $22 \to 76 \to 49 \to 22$.

Érdemes azt is megjegyezni, hogy a fenti sorozatokban szereplő minden szorzó 4-gyel több 9 valamely többszörösénél.

Még néhány ezoterikus (titokzatos) sokszög

A tizenegyszög szorzói

1. lap

N	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111
X	2	79	35	112	68	24	101	57	13	90	46
X^2	91	102	113	3	14	25	36	47	58	69	80
X^3	16	60	104	27	71	115	38	82	5	49	93
X^4	26	4	103	81	59	37	15	114	92	70	48
X^5	75	53	31	9	108	26	64	42	20	119	97

2. lap

N	2	101	79	57	35	13	112	90	68	46	24
X	61	72	83	94	105	116	6	17	28	39	50
X^2	4	70	15	81	26	92	37	103	48	114	59
X^3	53	119	64	9	75	20	86	31	97	42	108
X^4	14	91	47	3	80	36	113	69	25	102	58
X^5	71	16	82	27	93	38	104	49	115	60	5

Az egyes oszlopokat a következőkben leírt sorozatok folytathatják:

49, 70, 119, 91, 16, 26, 75, 80, 93, 48, 97, 25, 115, 37, 86, 113, 104, 103, 31, 69, 49, 4, 53, 14, 71, 59, 108, 58, 5, 92, 20, 36, 38, 15, 64, 47, 82, 114, 42, 102, 60, 4, 9, 3, 27, 81, 9

Találunk néhány „rejtett számot" is, melyeket minden ötödik néggyel való szorzás után kaphatunk a következő sorozatban, de ezek a számok nem szerepelnek a szorzók között. Ezeknek a „rejtett számoknak" szintén létezik egy saját egyedi sorozatuk, mely a következő:

34, 56, 12, 100, 45, 34 és
111, 23, 78, 89, 67, 111

A következő sorozatban ezeket a számokat félkövérrel jelöltük. Észre lehet venni, hogy a „félkövér" számok mindig ötös szakaszonként találhatók, eszerint a „normál" számok négyes csoportokban fordulnak elő.

Ha egyessel kezdünk és mindig 4-gyel szorzunk (természetesen mod 121), a következő sorozatot kapjuk:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	16	64	14	**56**	103	49	75	58	**111**

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
81	82	86	102	**45**	59	115	97	25	**100**	37

22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
27	108	69	**34**	15	60	119	113	**89**	114	93

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
9	36	**23**	92	5	20	80	**78**	70	38	31

44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	**12**	48	71	42	47	**67**	26	104	53	91

a 0-tól 54-ig terjedő számok mutatják, hogy hányszor kell 1-et 4-gyel megszorozni, hogy az alatta szereplő számot kapjuk, de természetesen minden szorzást mod 121 kell végeznünk. 91 után visszatérünk a kiindulóponthoz, vagyis az 1-hez, hiszen $91 \times 4 \pmod{121} = 1$.

Nagyon furcsa dolgok történnek eközben a magasabb rendű szorzókkal, de ennek kiderítését az olvasóra bízom, mivel én mindeddig nem tudtam rájönni.

Az ötszög esetében az egymást követő rendek egy négyes ciklust alkotnak mégpedig úgy, hogy bármely 2 egymást követő szorzó szorzata mindig a második szorzót követő szorzót adja. Ehhez hasonlót még sehol sem sikerült megfigyelnem. A hétszög esetében egy megfelelő hatos ciklust kapunk, melyet 5 vagy 3 (mod 7)-tel való, vagy 43 (mod 49)-cel való szorzással generálhatunk. A kilencszög szorzói között hármas ciklusokat találunk, és a tizenegyszög „oszlopai" 20-as és 4-es ciklusokban követik egymást. Mégis valamiféle „disztributivitás" érvényes a tizenegyszög esetében is, ahol az 55-ciklus tekinthető az „összeadási ciklusnak", és a többi 20-as és 4-es ciklusok és a „rejtett ciklusok" alkotják a „szorzási ciklusokat". Hadd végezzek néhány helyen egy kis ellenőrzést, beleértve a „rejtett számokat"!

(1) $1 + 2 = 3$, „lefordíthatjuk" a következőre: $4 \times 16 = 64$. Lépjünk fel „egy lépéssel" a szorzási ciklusokban, és ekkor a következőt kapjuk: $53 \times 26 = 47$, melyet visszafordíthatunk „összeadásra" úgy, mint $53 + 51 = = 49$, amit könnyen ellenőrizhetünk mod 55 (amely az összeadási ciklus hossza).

(2) $2 + 3 = 5$, melyet lefordíthatunk: $16 \times 64 = = 56$. Lépjünk feljebb „2 lépéssel", csak úgy az érdekesség kedvéért, a szorzási ciklusban. A következőt kapjuk: $75 \times 82 = 100$, melyet visszafordíthatunk „összeadás" nyelvére: $8 + 12 = 20$.

(3) Vizsgáljuk meg, mi történik, ha csak „rejtett számokat" használunk $5 + 10 = 15$, „lefordítva": $56 \times 111 = 45$. Lépjünk feljebb „3 lépéssel" a szorzási ciklusban, a következőt kapjuk: $45 \times 89 = 12$, mely „összeadásként" a következőt adja: $15 + 30 = 45$.

A tizenegy „rejtett számnak" szintén megvan a saját élete. Ebben az esetben az „összeadási ciklus" a következőképpen alakul:

1	→	56	→	111	→	45	→	100	→	34	→	89	→	23	→	78	→	12	→	67	→	1
0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		0

Próbáljuk ki: $1 + 2 = 3$, amely ebben az esetben $56 \times 111 = 45$, amelyet szintén elmozgathatunk „egy lépéssel" a „szorzási cikluson" át: $12 \times 23 = 34$, mely „összeadásként" $9 + 7 = 5$-öt, valóban helyes eredményt ad mod 11. Így egy disztributív „mini játékot" találtunk elrejtve a nagyobb „játékban".

Ha 0-tól 10-ig való összeadási sorozatban 8 mod 11-gyel szorzunk, akkor egy 10-es ciklust kapunk, konkrétan: 1, 8, 9, 6, 4, 10, 3, 2, 5, 7, 1 vagy a „rejtett számokat" használva 56, 78, 12, 89, 100, 67, 45, 111, 34, 23, 56.

Érdemes megjegyezni, hogy ezen sorozatok közül az elsőben bármely két egymást követő számot összeadva a második után következő számot kapjuk. Ezért a második sorozatban bármely két egymást követő szám szorzata a második utáni számot adja eredményül. Így ez a „rejtett 11 elemből álló test"! Az előző öt elemből álló két sorozatot megkaphatjuk 9 mod 11-gyel szorozva ezen első sorozatból.

A tizenháromszög

1. lap

N	1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157
X	2	119	67	15	132	80	28	145	93	41	158	106	54
X^2	127	140	153	166	10	23	36	49	62	75	88	101	114
X^3	16	42	68	94	120	146	3	29	55	81	107	133	154
X^4	68	16	133	81	29	146	94	42	159	107	55	3	120

2. lap

N	2	145	119	93	67	41	15	158	132	106	80	54	28
X	85	98	111	124	137	150	163	7	20	33	46	59	72
X^2	4	134	95	56	17	147	108	69	30	160	121	82	43
X^3	74	165	87	9	100	22	113	35	126	48	139	61	152
X^4	87	74	61	48	35	22	9	165	152	139	126	113	100

A négynél magasabb rendű szorzók oszlopaira a következő sorozatokat kapjuk:

9	48	139	126	152	100	35	165	74	87	61	113
3	94	81	107	55	159	120	29	42	16	68	133

mint az „egyelemű sorozatok": 22 és 146. Ez a két szám, az 1-gyel együtt, egy három elemből álló csoportot alkot a szorzás műveletére mod 169.

Az első sorban bármely két egymást követő szám szorzata a második szám alatt álló szám. A második sorban bármely két egymást követő szám szorzata az első szám előtt álló szám, de az első sorban. Mindkét sort tekinthetjük a 13-as ciklus részeként, az első ciklus szintén tartalmazni fogja a 22-es számot, a másodikhoz még hozzávesszük a 146-ot. Természetesen a sorrend megváltozik. Például az első sort vizsgálva, választhatjuk a 14-gyel való szorzást, ekkor a következő sorozatot kapjuk:

22	→ 139	→ 87	→ 35	→ 152	→ 100	→ 48	→ 165	→ 113	→ 61	→ 9	→ 126	→ 74	→ 22
1	14	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	157	1
(0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0)
	139	126	152	100	35	165	74	87	61	113	9	48	

a második sor adja azokat a számokat, melyeket 22-vel megszorozva a szám fölötti számot kapjuk az első sorban. A harmadik sorban számoljuk 22-nek a 14-gyel való szorzását. Az utolsó sor adja meg azt a rendet, melyben az egyre növekvő rendű szorzók kerülnek elő ugyanazon a tengelyen.

Nevezzük el a fenti sorok közül az elsőt összeadási ciklusnak és az utolsót szorzási ciklusnak, melyet a kényelem miatt írtunk oda.

Ha az összeadási ciklus minden második tagját szeretnénk venni, könnyen megtehetjük ezt $27 = 14 + 13$-mal való szorzással. Minden harmadik számot tartalmazó ciklust kapunk, ha 40-nel szorzunk, $40 = 14 + 26$ és így tovább. Ne tévesszen meg bennünket, hogy az összeadási ciklushoz szorzásokkal jutottunk el.

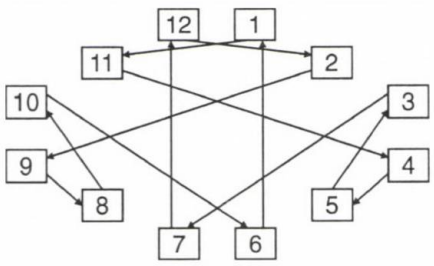
Az indok, amiért az „összeadási ciklus" és „szorzási ciklus" neveket javaslom az, hogy a szorzási ciklus disztributív az összeadási ciklusra nézve. Hadd ellenőrizzem ezt gyorsan! Az összeadási ciklusban példaképpen vehetnénk a következőt: $2 + 3 = 5$, mely a következőt jelenti: 87 és 35, mely 100-hoz vezet, vagy $27 \times 40 = 66 \pmod{169}$.

Most „mozgassuk" egy lépéssel feljebb ezeket a számokat a szorzási ciklusban. A következőt kapjuk: 61 és 65, mely 35-höz vezet vagy $118 \times 92 = 40$, mely helyes eredmény (mod 169), és ezt „lefordítva" az összeadás 13-as ciklusára, $9 + 7 = 3$-at jelent, mely igaz a 13-as ciklusban, hiszen $9 + 7 = 16$ és $16 \pmod{13} = 3$.

Így, ha igaz a disztributivitás, akkor az összeadási és a szorzási ciklusok alkotják a 13 elemű testet.

Ha 1-től 12-ig egy sorozatba írjuk a számokat, de a szorzási ciklus rendjében, akkor a következőt kapjuk: 1, 11, 4, 5, 3, 7, 12, 2, 9, 8, 10, 6 és vissza az 1-hez, akkor minden számot megkaphatunk az előzőből 11 (mod 13)-mal való szorzással.

Az olvasó kipróbálhat még néhány, a fentihez hasonló példát, hogy meggyőzze önmagát, hogy a szorzási ciklus valóban disztributív az összeadásira nézve. E tény szigorú bizonyítását feladatként az olvasóra bízom. Egy kis segítséget nyújt a következő diagram:



A tizenötszög

1. lap

Az első sor mutatja azokat a számokat, ahányszor meg kell szorozni 1-et 16-tal, hogy az alatta lévő számot kapjuk.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N	1	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181	196	211
X	2	167	107	47	212	152	92	32	197	137	77	17	182	122	62
X^2	169	184	199	214	4	19	34	49	64	79	94	109	124	139	154
X^3	16	121	1	106	211	91	196	76	181	61	166	46	151	31	136
X^4	196	211	1	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181
X^5	61	31	1	196	166	136	106	76	46	16	211	181	151	121	91
X^6	106	166	1	61	121	181	16	76	136	196	31	91	151	211	46
X^7	16	121	1	106	211	91	196	76	181	61	166	46	151	31	136

2. lap

N	2	197	167	137	107	77	47	17	212	182	152	122	92	62	32
X	113	128	143	158	173	188	203	218	8	23	38	53	68	83	98
X^2	4	214	199	184	169	154	139	124	109	94	79	64	49	34	19
X^3	211	106	1	121	16	136	31	151	46	166	61	181	76	196	91
X^4	31	16	1	211	196	181	166	151	136	121	106	91	76	61	46
X^5	166	96	1	31	61	91	121	151	181	211	16	46	76	106	136
X^6	121	61	1	166	106	46	211	151	91	31	196	136	76	16	181
X^7	211	214	1	121	16	136	31	151	46	166	61	181	76	196	91

Az X^3 sortól kezdve az oszlopok négyes vagy egyes ciklusokat alkotnak. A csupa 1-est tartalmazó oszloptól indulva minden ötödik oszlop egy hosszú ciklust alkot. Ahhoz, hogy az egyik ilyen egyelemű oszloptól a következőig eljussunk, balról jobbra haladva csak 150-et kell hozzáadni ahhoz a számhoz (mod 225), míg jobbról balra haladva 75 (mod 225)-öt kell hozzáadnunk.

A négyes ciklusok a következőek:

$$181 \to 91 \to 46 \to 136 \to 181,$$
$$196 \to 61 \to 106 \to 16 \to 196,$$
$$211 \to 31 \to 166 \to 121 \to 211$$

Az első ciklusban bármely két egymást követő szám szorzata a második számot követő szám. Már láttuk, ugyanez történt az ötszög esetében is.

Kipróbálhatjuk, kezelhetjük úgy a bekarikázott számokat, mint 0-tól 14-ig terjedő ciklus. Láthatjuk, hogy az a művelet, mikor a három ciklus valamelyikében „felfele mozgattunk" egy számot, disztributív az „összeadásra" nézve a 0-tól 14-ig terjedő tizenötös ciklusban. Néhány ponton hadd ellenőrizzem.

Az $1 + 2 = 3$ összeadást „lefordíthatjuk" $16 \times 31 = 46$ szorzássá.

Mozgassuk felfele mindegyik számot egy lépéssel, ahogy ezt a három rövid ciklus megkívánja. 16-ból 196 lesz, a 31-es számból 166 lesz és 46-ból pedig 136. De könnyen ellenőrizhető, hogy $196 \times 166 = 136$, melyet lefordíthatunk a következőre: $13 + 11 = 24$, mely 9 (mod 15), amely szám a 136-ot adja.

Az első rövid ciklus tartalmazza egy ötös ciklus elemit, ha az 1-et is hozzávesszük. A ciklus egy lehetséges generátora ($\times 91$), vagy lehetne ($\times 46$), ahogy a következő ciklust kapjuk, ha ismételten 91 (mod 225)-tel való szorzást alkalmazzuk:

$$1 \to 91 \to 181 \to 46 \to 136 \to 1$$

A ciklusokban előforduló mind a tizenöt számot megkaphatjuk, ha 1-essel kezdünk, és ismételten a 16 (mod 225)-tel való szorzást elvégezzük. Valójában ezek a számok teljesen megegyeznek a tizenötszög oldalaira írott „bekarikázott számokkal". Ugyanakkor az első- és a másodrendű szorzók nagyon eltérőek.

A tizenhétszög szorzói

1. lap

1	18	35	52	69	86	103	120	137	154	171	188	205	222	239	256	273
2	223	155	87	19	240	172	104	36	257	189	121	53	274	206	138	70
217	234	251	268	285	13	30	47	64	81	98	115	132	149	166	183	200
16	152	288	135	271	118	254	101	237	84	220	67	203	50	186	133	169
35	18	1	273	256	239	222	205	188	171	154	137	120	103	86	69	52
222	256	1	35	69	103	137	171	205	239	273	8	52	86	120	154	188

miután az oszlopok a következő egyik vagy másik nyolcas ciklusban folytatódnak:

$35 \to 222 \to 137 \to 18 \to 256 \to 69 \to 154 \to 273 \to 35$

$120 \to 52 \to 188 \to 205 \to 171 \to 239 \to 103 \to 86 \to 120$

2. lap

2	257	223	189	155	121	87	53	19	274	240	206	172	138	104	70	36
145	162	179	196	213	230	247	264	281	9	26	43	60	77	94	111	128
4	21	38	55	72	89	106	123	140	157	174	191	208	225	242	259	276
271	135	288	152	16	169	33	186	50	203	67	220	84	237	101	254	118
256	273	1	18	35	52	69	86	103	120	137	154	171	188	205	222	239
69	35	1	256	222	188	154	120	86	52	18	273	239	205	171	137	103

miután az oszlopok az 1. oldal esetében leírt ciklusokat folytatják.

Meghatározhatunk egy 17-es ciklust, mely 1-gyel kezdődik és 35 (mod 289)-cel való szorzást végzünk tizenhétszer, mely által visszajutunk 1-hez. Ez az „összeadási ciklus", míg a két nyolcas ciklus pedig a „szorzási ciklus"

1,	35,	69,	103,	137,	171,	205,	239,	273,	18,	52,	86,	120,	154,	188,	222,	256,	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	0

Érdemes megjegyezni, hogy az előző ciklusban végig a számok 34 (mod 289)-cel nőnek, és szintén 35 (mod 289)-ce1 szorzódnak.

Ellenőrizzük a disztributivitást egy példán! Vegyük például: $3 + 5 = 8$, mely $103 \times 171 = 273$-at jelent. „Mozgassuk most ezt felfele két lépéssel" a szorzási cikluson! A következőt kapjuk: $120 \times 103 = 222$, ez, mikor „összeadássá" fordítjuk, a következőhöz vezet: $12 + 3 = 15$, ami nyilvánvalóan igaz.

Páros oldalú poligonok

A négyzet szorzói

1. lap

	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló
szám	1		13		9		5	
X	3	15	11	7	3	15	11	7
X^2	9	1	9	1	9	1	9	1
X^3	1	1	1	1	1	1	1	1

2. lap

	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló	oldal	átló
szám	3		15		11		7	
X	11	15	3	7	11	15	3	7
X^2	9	1	9	1	9	1	9	1
X^3	1	1	1	1	1	1	1	1

A szorzóknál egy sorban a „következőt" úgy kell tekintenünk, mint a „következő utánit" (a következő következőjét), mivel a „következő" a teljes fordulat nyolcadrészével való fordulatot adna a teljes fordulat negyedével szemben.

Ezek a szorzók az 1. lapon a következők:

A „szám"-mal jelzett sorban: $13 = (3 \times 4 + 1)$

Az X sorban: $9 = (2 \times 4 + 1)$

Az X^2 sorban: $1 = (0 \times 4 + 1)$

A 2. lapon a szorzók a következőek:

A „szám"-mal jelzett sorban: $5 = (1 \times 4 + 1)$

Az X sorban: $9 = (2 \times 4 + 1)$

Az X^2 sorban: $1 = (0 \times 4 + 1)$

A 3, 2, 0 és az l, 2, 0 sorozatok mindegyike $\times 2$ (mod 4)-gyel való szorzással generálható. (Vegyük észre, hogy 0-ig jutunk el, és ez az érték marad meg mindkét sorozat esetén, hiszen egy 4-es ciklikus sorozat nem alkot testet, hanem csak gyűrűt.)

A hatszög szorzói

1. lap

N	1		7		13		19		25		31	
X	5	11	17	23	29	35	5	11	17	23	29	35
X^2	13	25	1	13	25	1	13	25	1	13	25	1
X^3	13	25	1	13	25	1	13	25	1	13	25	1

2. lap

N	5		11		17		23		29		35	
X	29	23	17	11	5	35	29	23	17	11	5	35
X^2	25	13	1	25	13	1	25	13	1	25	13	1
X^3	25	13	1	25	13	1	25	13	1	25	13	1

A szorzóknál egy sorban a „következőt" ismét úgy kell tekintenünk, mint a „következő utánit" (a következő következőjét), mivel a „következő utáni" a teljes fordulat hatodrészével való fordulatot ad.

Ezek a szorzók az 1. lapon a következők:

A „N"-nel jelzett sorban: $7 = (1 \times 6 + 1)$

Az X sorban: $25 = (4 \times 6 + 1)$

Az X^2 sorban: $25 = (4 \times 6 + 1)$

A 2. lapon a szorzók a következőek:

A „N"-nel jelzett sorban: $31 = (5 \times 6 + 1)$

Az X sorban: $13 = (2 \times 6 + 1)$

Az X^2 sorban: $13 = (2 \times 6 + 1)$

Az 1, 4, 4,... sorozat $\times 4$ (mod 6)-tal való szorzással generálható.

Az 5, 2, 2, ... sorozatot a $\times 4$(mod 6) ismételt szorzásával kapjuk.

A nyolcszög szorzói

1. lap

N	1		9		17		25		33		41		49		57	
X	3	43	19	59	35	11	51	27	3	43	19	59	35	11	51	27
X^2	57	9	25	41	57	9	25	41	57	9	25	41	57	9	25	41
X^3	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49
X^4	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
X^5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2. lap

N	3		43		19		59		35		11		51		27	
X	43	3	27	51	11	35	59	19	43	3	27	51	11	35	59	19
X^2	9	57	41	25	9	57	41	25	9	57	41	25	9	57	41	25
X^3	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17	49	17
X^4	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
X5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

A szorzóknál egy sorban a „következő" ismét a „következő utánira" (a következő következőjére) utal, mivel a „következő utáni" a teljes fordulat nyolcadrészével való fordulatot ad a nyolcszögben.

Ezek a szorzók az 1. lapon a következők:

A „N"-nel jelzett sorban: $9 = (1 \times 8 + 1)$

Az X sorban: $49 = (6 \times 8 + 1)$

Az X^2 sorban: $33 = (4 \times 8 + 1)$

Az X^3 sorban: $1 = (0 \times 8 + 1)$

és a szorzó ($\times 1$) lesz minden további sorra!

Az $1 \to 6 \to 4 \to 0$ sorozatot a $\times 6$ (mod 8) ismételt szorzásával kaphatjuk.

A 2. lapon a megfelelő szorzók a következők:

A „N"-nel jelzett sorban $57 = (7 \times 8 + 1)$

Az X sorban: $17 = (2 \times 8 + 1)$

Az X^2 sorban: $33 = (4 \times 8 + 1)$

Az X^3 sorban: $1 = (0 \times 8 + 1)$

és a szorzó ($\times 1$) lesz minden további sorra!

A $7 \to 2 \to 4 \to 0$ sorozat a $\times 6$ (mod 8)-cal való szorzással generálható.

A tízszög szorzói

1. lap

N	1		11		21		31		41		51		61		71		81		91	
	3	73	43	13	83	53	23	93	63	33	3	73	43	13	83	53	23	93	63	33
	89	69	49	29	9	89	69	49	29	9	89	69	49	29	9	89	69	49	29	9
	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21
	41	21	l	81	61	41	21	1	81	61	41	2l	1	81	61	41	21	1	81	61
	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81
	61	81	1	21	41	61	81	1	21	41	61	81	1	21	41	61	81	1	21	41
	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21

2. lap

N	3		73		43		13		83		53		23		93		63		33	
	67	37	7	77	47	17	87	57	27	97	67	37	7	77	47	17	87	57	27	47
	9	29	49	69	89	9	29	49	69	89	9	29	49	69	89	9	29	49	69	89
	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81
	61	81	1	21	41	61	81	1	21	41	61	81	1	21	41	61	81	1	21	41
	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21	81	41	1	61	21
	41	21	1	81	61	41	21	1	81	61	41	21	1	81	61	41	21	1	81	61
	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81	21	61	1	41	81

A szorzók az egyes sorokban a „következő utáni" számot kell hogy adják, ahogy ez megfelel a teljes fordulat tizedrészével való elforgatásnak a szabályos tízszögben.

Ezek a szorzók az 1. lapon a következők:
Az N sorban: 11
Az elsőrendű szorzókra: 81
A másodrendű szorzókra: 41
A harmadrendű szorzókra: 21
A negyedrendű szorzókra: 61
Az ötödrendű szorzókra: 81
A hatodrendű szorzókra: 41
A hetedrendű szorzókra: 21

A $8 \to 4 \to 2 \to 6 \to 8$ sorozat a $\times 8$ (mod 10)-zel való szorzással generálható, amely folytatható a végtelenségig.

Ezek a szorzók a 2. lapon a következők:
Az N sorban: 91
Az elsőrendű szorzókra: 21
A másodrendű szorzókra: 61
A harmadrendű szorzókra: 81
A negyedrendű szorzókra: 41
Az ötödrendű szorzókra: 21
A hatodrendű szorzókra: 61
A hetedrendű szorzókra:

A $2 \to 6 \to 8 \to 4 \to 2$ sorozata $\times 8$ (mod 10)-zel való szorzással generálható, amely folytatható a végtelenségig.

Néhány kapcsolat a szorzók sorai között

Szomszédos rendű szorzók közti kapcsolatok

Az ötszög

Jelölje az 1. lapot X, a 2. lapot Y, de úgy, hogy X és Y minden esetben ugyanahhoz a tengelyhez tartozzon, ugyanazon rendű szorzók legyenek tehát, csak a sokszög két különböző felén. Ekkor a következő kapcsolatot állapíthatjuk meg az egyik rendű és a következő rendű szorzók között, a szorzók a 25 elemű ciklusból származnak:

$$X + 8Y = X^2$$
$$3X^2 + 21Y^2 = X^3$$

miután

$$12X^i + 14Y^i = X^{i+1}$$

i = 3-tól kezdve

Hétszög

Ebben az esetben a szorzók a 49 elemű ciklusból származnak. A kapcsolat köztük a következő:

$$3X^i + 13Y^i = X^{i+1}$$

i = 1-től kezdve

Kilencszög

A szorzók a 81-es ciklusból valók. Találunk néhány „speciális" szorzót a számok és az elsőrendű szorzók, valamint a elsőrendű szorzók és a másodrendű szorzók között. Ezután a szorzók ismétlődnek. A kapcsolatok a következők:

$$17N_X + 33N_Y = X, \quad 32X + 75Y = X^2$$

és i = 2-től kezdve

$$31X^i + 78Y^i = X^{i+1}$$

Tizenegyszög

Úgy tűnik, hogy nincs lineáris kapcsolat a harmad- és a negyedrendű szorzók között. Hogy a páros esetekben mi történik, azt az olvasóra bízom!

Sőt az olvasó azon is gondolkodhat, mi rejlik ennek az egész dolognak a mélyén!

Zoltan Paul Dienes
P.O.BOX 482, Wolfville N.S. Canada
Telefon: 1 - 902 - 542 3732
további információért tekintse meg a következő honlapot: www.zoltandienes.com, vagy írjon e-mailt a zoltan@zoltandienes.com címre

Fordította: Urbán Eszter

Dr. Kántor Sándorné

Az 1997-1999. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák (AHSME) feladatai és megoldási kulcsai II. rész

Az 1999. évi AHSME feladatai

1. Mivel egyenlő:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 98 + 99 =$$

(A) –50 (B) –49 (C) 0 (D) 49 (E) 50

2. Melyik állítás *hamis* a következők között:

(A) Bármely két egyenlő oldalú háromszög egybevágó.

(B) Minden egyenlő oldalú háromszög konvex.

(C) Minden egyenlő oldalú háromszög egyenlő szögű.

(D) Minden egyenlő oldalú háromszög általános sokszög.

(E) Bármely két egyenlő oldalú háromszög hasonló egymáshoz.

3. Melyik szám helyezkedik el a számegyenesen az $\frac{1}{8}$-tól és az $\frac{1}{10}$-től ugyanolyan távol?

(A) $\frac{1}{80}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{1}{9}$ (E) $\frac{9}{80}$

4. Határozzátok meg az 1 és 100 közé eső azon prímszámok összegét, amelyekre egyidejűleg igaz, hogy egy 4 többszörösnél 1-gyel nagyobbak és egy 5 többszörösnél 1-gyel kisebbek?

(A) 118 (B) 137 (C) 158 (D) 187 (E) 245

5. Egy könyvön szereplő ár 30%-kal volt alacsonyabb, mint a javasolt kiskereskedelmi ár. Ezt a könyvet az ötvenedik könyvkiárusításon Alice a rajta szereplő ár feléért vette meg. A javasolt kiskereskedelmi ár hány %-át kellett kifizetnie?

(A) 25% (B) 30% (C) 35%
(D) 60% (E) 65%

6. Mivel egyenlő a $2^{1999} \cdot 5^{2001}$ szorzat tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 10

7. Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy konvex hatszögnek?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. 1994 végén Walter feleannyi idős volt, mint a nagymamája. A kettejük születési évének összege 3838. Hány éves lesz Walter 1999 végén?

(A) 48 (B) 49 (C) 53 (D) 55 (E) 101

9. Mielőtt Ashley elkezdte 3 órás útját a kilométer számláló 29792-t mutatott. Ez egy palindrom szám. A palindrom szám ugyanaz balról jobbra olvasva, mintha jobbról balra olvasnánk. A célállomáson a km számláló újabb palindrom számot mutatott. Ha Ashley soha nem lépte át a 75 km/óra sebességhatárt, akkor melyik volt a legnagyobb lehetséges átlagsebessége az alábbiak közül?

(A) $33\frac{1}{3}$ (B) $53\frac{1}{3}$ (C) $66\frac{2}{3}$
(D) $70\frac{1}{3}$ (E) $74\frac{1}{3}$

10. Egy lepecsételt boríték egy kártyát tartalmaz, amelyen egy egyjegyű szám van. Az alábbi állítások közül 3 igaz és 1 hamis.

I. A számjegy az 1.
II. A számjegy nem a 2.
III. A számjegy a 3.
IV. A számjegy nem a 4.

A következő állítások közül melyiknek kell szükségképpen igaznak lenni?

(A) I. igaz (B) I. hamis (C) II. igaz
(D) III. igaz (E) IV. hamis

11. Az iskolában lévő tanulói szekrények az 1-sel kezdődően egymás után voltak sorszámozva. A számjegyek műanyagból készültek, melyek darabja 2 cent volt. Tehát a 9-es szám 2 centbe került, a 10-es pedig 4-be. Ha 137 dollár 94 centet költöttünk az összes szekrény számozására, akkor hány szekrény volt az iskolában? (1 dollár = 100 cent.)

(A) 2001 (B) 2010 (C) 2100
(D) 2726 (E) 6897

12. Legfeljebb hány pontban metszheti egymást két különböző negyedfokú polinom függvény ($y = f(x)$, $y = g(x)$), ha a legmagasabb fokú tag együtthatója mindkét esetben 1?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 8

13. Definiáljuk a valós számok halmazán az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatot a következő módon: legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$, ha $n > 1$. Mivel egyenlő a_{100} értéke?

(A) 33^{33} (B) 33^{99} (C) 99^{33}
(D) 99^{99} (E) ezek egyike sem.

14. Négy lány – Mary, Alina, Tina és Hanna – egy koncerten trióban énekeltek. Minden dalnál egy lány ült, a többi énekelt. Hanna 7 dalt énekelt összesen, ami több volt mindenkiénél. Mary négy dalt énekelt, ami mind közül a legkevesebb volt. Hány dalt adott elő a trió összesen?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

15. Legyen x egy olyan szám, amelyre $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = 2$. Mivel egyenlő az $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$ összeg?

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4 (E) 0,5

16. Mennyi a sugara annak a legnagyobb körnek, amelyet egy 10 és 24 egység átlóhosszúságú rombuszba rajzolhatunk?

(A) 4 (B) $\frac{58}{13}$ (C) $\frac{60}{13}$ (D) 5 (E) 6

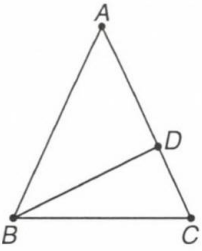
17. Ha a $P(x)$ polinomot $(x - 19)$-cel osztjuk, akkor a maradék 99. Ha $(x - 99)$-cel osztjuk, akkor 19 lesz a maradék. Mennyi a maradék, ha $P(x)$-et $(x - 19)(x - 99)$-cel osztjuk?

(A) $(-x + 80)$ (B) $(x + 80)$ (C) $(-x + 118)$
(D) $(x + 118)$ (E) 0

18. A $0 < x < 1$ intervallumon hány zérushelye van az $f(x) = \cos(\lg x)$ függvénynek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 10
(E) végtelen sok

19. Tekintsük azon ABC háromszögeket, amelyekre $AB = AC$. Legyen D olyan pont az AC oldalon, amelyre teljesül, hogy BD merőleges AC-re. Az AD és CD hossza egész szám, továbbá $BD^2 = 57$.



Az ilyen tulajdonságú háromszögek között mekkora az AC legkisebb értéke?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

20. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban $a_1 = 19$, $a_9 = 99$ és minden $n > 3$ esetén a_n az első $n - 1$ elem számtani átlaga. Mivel egyenlő a_2?

(A) 29 (B) 59 (C) 79 (D) 99 (E) 179

21. Egy 20, 21 és 29 egység oldalú háromszög köré kört rajzolunk. A kör belsejét így négy részre bontottuk. Jelöljék A, B és C a háromszögön kívüli részek területét úgy, hogy közöttük C a legnagyobb. Melyik összefüggés helyes az alábbiak közül:

(A) $A + B = C$ (B) $A + B + 210 = C$
(C) $A^2 + B^2 = C^2$ (D) $20A + 21B = 29C$
(E) $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}$

22. Az $y = -|x - a| + b$ és $y = |x - c| + d$ függvények grafikonjai a (2; 5) és (8; 3) pontokban metszik egymást. Mivel egyenlő $a + c$?

(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 13 (E) 18

23. Az $ABCDEF$ egyenlő szögű konvex hatszögben $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 2$ és $DE = 4$. Mekkora a hatszög területe?

(A) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ (B) $9\sqrt{3}$ (C) 16
(D) $\frac{39}{4}\sqrt{3}$ (E) $\frac{43}{4}\sqrt{3}$

24. Adott egy kör hat pontja. A 6 pont páronkénti összekötéseiből kapott húrok közül négyet találomra kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a négy húr egy konvex négyszöget határoz meg?

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{91}$ (C) $\frac{1}{273}$
(D) $\frac{1}{455}$ (E) $\frac{1}{1365}$

25. Az a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 olyan egyjegyű számok, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!},$$

ahol $0 \le a_i < i$ és $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Határozzuk meg $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ értékét!

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

26. Adott három egymást nem fedő síkbeli szabályos sokszög, melyek mindegyik oldala 1 egység hosszúságú, s közülük legalább 2 egybevágó. A sokszögek az „A" pontban találkoznak oly módon, hogy a három belső szög összege az „A" pontban éppen 360°. Így a három sokszög egy újabb sokszöget alkot, melynek belső pontja „A". Mekkora lehet a lehető legnagyobb kerülete ennek az *új sokszögnek*?

(A) 12 (B) 14 (C) 18 (D) 21 (E) 24

27. Az ABC háromszög szögeire igaz, hogy $3\sin\alpha + 4\cos\beta = 6$ és $4\sin\beta + 3\cos\alpha = 1$. Mivel egyenlő a C csúcsnál lévő szög? (A jelölések a szokásosak.)

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 120° (E) 150°

28. Legyen x_1, x_2, x_3, ..., x_n egész számok sorozata, amelyre fennáll:

(i) $-1 \le x_i \le 2$, ha $i = 1, 2, 3, ..., n$.
(ii) $x_1 + x_2 + ... + x_n = 19$ és
(iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = 99$.

Legyen az $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ... + x_n^3$ kifejezés lehetséges legkisebb értéke m, illetve a lehetséges legnagyobb értéke M. Akkor az $\frac{M}{m}$ értéke:

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

29. Adott egy olyan tetraéder, amelyet négy egybevágó szabályos háromszög határol. Megrajzoltuk a köré írható, valamint a beírható gömböt. A négy lap mindegyikéhez megrajzoltuk azon külső érintőgömböt, amely a lapot a középpontjában érinti, valamint érinti a tetraéder köré írható gömböt is. Válasszunk ki véletlenszerűen egy P pontot a köré írt gömb belsejében! Mennyi annak a valószínűsége közelítően, hogy P az 5 kisgömb belsejében van?

(A) 0 (B) 0,1 (C) 0,2 (D) 0,3 (E) 0,4

30. Hány olyan egész számokból álló $(m; n)$ rendezett számpár van, amelyekben $m \cdot n \ge 0$ és $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$?

(A) 2 (B) 3 (C) 33 (D) 35 (E) 99

A megoldási kulcs:

E - A - E - A - C - D - B - D - D - C - A - C - C - A - E - C - C - E - C -E - B - C - E - B - B - D - A - E - C - D.

Megjegyzések:

1. A 24. feladat esetében ismét szükség van a valószínűség kombinatorikus kiszámításának ismeretére.

A 24. feladat megoldása:

A megadott 6 pont közül bármely 4 mindig egyértelműen meghatároz egy konvex négyszöget, így a kedvező esetek száma: $\binom{6}{4} = 15$, ha a húrokat találomra választjuk ki. Mivel $\binom{6}{2} = 15$ húr van, így a 4 húrt $\binom{15}{4} = 1365$ féleképpen választhatjuk ki. A keresett valószínűség 15/1365.

2. Nehéznek bizonyult a 30. feladat is. A 30. feladat megoldása:

Legyen $m + n = s$. Ekkor

$$m^3 + n^3 + 3mn(m + n) = s^3. \quad (1)$$

(1)-ből kivonva az eredeti egyenletet kapjuk :

$$s^3 - 33^3 = 3mns - 99mn.$$
$$(s - 33)(s^2 + 33s + 33^2 - 3mn) = 0.$$

Innen $s = 33$ vagy $(m + n)^2 + 33(m + n) + 33^2 - 3mn = 0$, ami ekvivalens az $(m - n)^2 + (m + 33)^2 = 0$ egyenlettel, aminek egyetlen megoldása: $(-33; -33)$. Az $m + n = 0$ feltételt a $(0; 33), (1; 32), \ldots, (33; 0)$, összesen 34 számpár elégíti ki, így a rendezett számpárok száma 35.

Az 1996. évi AIME feladatai

1. Egy *bűvös négyzet*ben bármely három egy sorban, egy oszlopban vagy egy átlóban álló elem összege ugyanannyi. Az ábrán egy bűvös négyzet néhány eleme van megadva. Határozza meg x értékét!

x	19	96
1		

2. Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét! Hány darab pozitív egész n esetén igaz az, hogy $n < 1000$ és $[\log_2 n]$ páros pozitív egész szám?

3. Meghatározandó az a legkisebb pozitív egész n, amelyre az $(xy - 3x + 7y - 21)^n$ kifejezést kifejtve a lehetséges összevonások után egy legalább 1996 tagú összeghez jutunk.

4. Egy 1 cm élhosszúságú fakocka egy vízszintes felületen nyugszik. Ha megvilágítjuk egy pontszerű fényforrással, amelyik éppen a kocka egyik felső csúcsa felett van x centiméterrel, akkor a kocka árnyékot vet a vízszintes felületre; ennek az árnyéknak a területe 48 cm^2, ha nem számítjuk hozzá a kocka alatti területet. Mennyi $[1000x]$?

5. Tegyük fel, hogy az $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ egyenlet gyökei a, b és c, az $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ egyenlet gyökei pedig $a + b$, $b + c$ és $c + a$. Határozza meg a t paraméter értékét!

6. Egy körmérkőzéses tornán, amelyen öt csapat vesz részt, mindegyik csapat bármely másikkal egy mérkőzést játszik. Minden csapatnak minden egyes mérkőzésén 50% esélye van a győzelemre (döntetlen nincs). Legyen m/n annak a valószínűsége, hogy a torna során egyetlen csapat sem marad veretlen vagy nyeretlen; m és n relatív prím pozitív egészek. Meghatározandó $m + n$.

7. Egy 7×7-es „sakktábla" két mezőjét sárgára festették, a többit zöldre. Két színezést ekvivalensnek tekintünk, ha az egyiket megkaphatjuk a másik síkbeli elforgatásával. Hány darab különböző (egymással páronként nem ekvivalens) színezés lehetséges?

8. Két pozitív szám *harmonikus közepén* a reciprokaik számtani közepének reciprokát értjük. Hány darab (x, y) rendezett párra teljesül, hogy x és y pozitív egészek, $x < y$, továbbá x és y harmonikus közepe 6^{20}?

9. Egy unatkozó diák egy bezárt szekrényekkel teli folyosón sétálgat. A szekrények sorban vannak megszámozva, 1-től 1024-ig. A diák kinyitja az 1-es számú szekrényt, majd ezt követően minden második (bezárt) szekrényt. Amikor a folyosó végére ér, megfordul, és visszafelé haladva kezdi nyitogatni a szekrényeket: kinyitja az első olyan szekrényt, amit zárva talál, majd ezután minden második bezárva talált szekrényt kinyit, a többit zárva hagyva. Addig mászkál fel-alá a szekrényeket ily módon nyitogatva, amíg minden szekrényt ki nem nyit. Mi a sorszáma annak a szekrénynek, amit utoljára nyit ki?

10. Meghatározandó a

$$\operatorname{tg} 19x^\circ = \frac{\cos 96^\circ + \sin 96^\circ}{\cos 96^\circ - \sin 96^\circ}$$

egyenlet legkisebb pozitív egész megoldása.

11. Legyen P a $z^6 + z^4 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ egyenlet azon gyökeinek szorzata, amelyeknek a képzetes része pozitív, és tegyük fel, hogy $P = r(\cos\theta^\circ + i\sin\theta^\circ)$, ahol $0 < r$ és $0 \le \theta < 360$. Meghatározandó θ.

12. Az 1, 2, 3, ..., 10 számok minden $a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \, . \, \ldots \, . \, a_{10}$ permutációjára képezzük az

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + |a_5 - a_6| + \\ + |a_7 - a_8| + |a_9 - a_{10}|$$

összeget. Az így kapott összegek átlaga felírható p/q alakban, ahol p és q relatív prím pozitív egészek. Meghatározandó $p + q$.

13. Az ABC háromszögben $AB = \sqrt{30}$, $AC = \sqrt{6}$ és $BC = \sqrt{15}$. Tekintsük azt a D pontot, amelyre az $\overline{AD}$ szakasz felezi a $\overline{BC}$ szakaszt és az ADB szög derékszög. A

$$\frac{T_{ADB}}{T_{ABC}}$$

hányados (vagyis az ADB és az ABC háromszögek területeinek aránya) felírható m/n alakban, ahol m és n relatív prím pozitív egészek. Meghatározandó $m + n$.

14. Egy $150 \times 324 + 375$-ös méretű téglatest $1 \times 1 \times 1$-es méretű kockákból van összeragasztva. A téglatest egy testátlója ezen $1 \times 1 \times 1$-es kis kockák közül hány darabnak halad át a belsején?

15. Az $ABCD$ paralelogramma $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ átlóinak metszéspontját jelölje O. A CAB és a DBC szögek egyaránt kétszer akkorák, mint a DBA szög, az ACB szög pedig r-szerese az AOB szögnek. Meghatározandó $1000r$ része.

A számválaszok:

200, 340, 044, 166, 023, 049, 300, 799, 342, 159, 276, 058, 065, 768, 777.

Megjegyzés:

A számválaszos feladatsor értékelése úgy történik, hogy minden jó válaszért 1 pont jár a versenyzőnek.

Ez a feladatsor összességében nehéz volt a tanulók számára, kb. felét tudták a rendelkezésükre álló 3 óra alatt megoldani.

Irodalom

[1] AHSME 1997, 1998, 1999, AIME 1996, MAA.

[2] Barra György: A nevelés forradalma és a középiskola, Protestáns Tanügyi Szemle X. 1936, 163-171 .

[3] Kántor Sándorné: Az 1993-1996. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák feladatai és megoldási kulcsai, A Matematika Tanítása, 1998. 3-4 szám, 9-24. Mozaik Oktatási Stúdió Szeged

[4] Kántor Sándorné: Tudós matematikatanárok Hajdú, Szabolcs és Szolnok megye középiskoláiban (1850-1948), DAB, Debrecen, 1986, 119-128

[5] Széplaky Györgyné: A matematikai tesztek és a gondolkodás, Matematika tanárképzés-matematikatanár-továbbképzés. 5 (1999), 95-116. Bp. Műszaki kiadó

HÍREK

A 2000. év a Matematika Nemzetközi Éve. Ez alkalomból világszerte és Magyarországon is megsokasodtak a rendezvények. Ezek sorába illeszkedett a Matematikatörténet és Matematikatanítás konferencia, amelyet az ELTE Főiskolai Karának Matematika Tanszéke szervezett 2000 április 17-18-án a Bolyai Társulat és az OMFB támogatásával. A konferenciát Szabó Árpád nyitotta meg egy emlékezetes beszédével, a nyitóelőadások egyikét Császár Ákos, a másikat David Lingard (Sheffield Hallam University, UK) tartotta. A munka négy szekcióban folytatódott, majd záróelőadásokkal ért véget.

Az első szekcióban a szigorúbb értelemben vett matematikatörténeti kutatásokról hangzottak el előadások, a másodikban többféle megközelítésben ismerkedhettek a hallgatók a matematikatörténet különböző aspektusaival, a harmadikban oktatással kapcsolatos kérdésekről volt szó, a negyedikben, amely a Bolyai évforduló előkészítésének is tekinthető, a nemeuklideszi geometriák osztálytermi taníthatóságának problémáit vizsgálták a résztvevők. A konferencia-előadások egy része a Matematikai Lapokban fog megjelenni, illetve már most olvasható a részletes programmal együtt az elkészült konferencia CD-n, amely kereskedelmi forgalomba nem fog kerülni, de néhány matematikai, matematikatanítási anyagokat gyűjtő könyvtárban elérhető.

A konferenciát CD-bemutatók és egyéb események kísérték.

A konferencián alakult meg a Bolyai Társulat által kiküldött ad hoc bizottság, amelynek feladata az volt, hogy vizsgálja meg, milyen keretek alkalmasak a matematikatörténettel foglalkozók munkájának összefogására, a személyes kapcsolatok fejlesztésére. Az ad hoc bizottság javaslatára létrejött a Bolyai Társulat Matematikatörténeti Bizottsága Császár Ákos vezetésével, amely 2000. október 12-én tartott ülésével megkezdte munkáját.

Munkácsy Katalin
A Matematikatörténeti Bizottság titkára

* * *

A budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium 2000. november 24-én, az iskolai nyílt nap keretében tehetségkutató matematikaversenyt rendezett 8. osztályos tanulók részére. A 120 percre kitűzött feladatok a következők voltak:

1. Melyik az a kétjegyű tízes számrendszerbeli szám, amely egyenlő az egyesek helyén álló számjegye négyzetének és a tízesek helyén álló számjegye összegével?

2. Hány olyan tízes számrendszerbeli négyjegyű szám van, amelyben szerepel 1-es számjegy?

3. Egy pozitív egész számról azt mondjuk, hogy „érdekes", ha egyenlő saját (1-től és önmagától különböző) valódi osztói szorzatával. Például a 6 érdekes, mert $6 = 2 \cdot 3$. Hány 50-nél nem nagyobb „érdekes" szám van?

4. Egy $ABCD$ négyzet AB oldalának belső pontja P. A PC egyenes és a DB átló metszéspontja Q. Az AQ egyenes a BC oldalt az R pontban metszi. Számoljuk ki az $ACRP$ négyszög szögeit!

5. Adott a koordinátarendszerben egy négyzet négy csúcsa közül a következő három: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$. Egy lépésben bármely már rendelkezésre álló pontot egy másik rendelkezésre álló pontra tükrözhetünk. Megkaphatjuk-e véges sok ilyen lépéssel a négyzet negyedik csúcsát, az $(1; 1)$ pontot?

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 2001. március 31.**

165. Megadható-e 2001 darab különböző pozitív egész szám úgy, hogy összegük megegyezzen legkisebb közös többszörösükkel?

166. Az $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényre $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n+1) = f(2n) + 1$ bármely pozitív egész n esetén. Határozzuk meg az f függvény maximumát, ha $1 \le n \le 2001$!

167. Az ABC háromszögben a BC, CA, AB oldalakhoz hozzáírt körök rendre k_1, k_2, k_3. A BC egyenes a k_2 kört az A_2, a k_3 kört az A_3 pontban, a CA egyenes a k_1 kört a B_1, a k_3 kört a B_3 pontban, az AB egyenes a k_1 kört a C_1, a k_2 kört a C_2 pontban érinti. Igaz-e, hogy az $A_2B_3C_1$ és az $A_3B_1C_2$ háromszögek területe egyenlő?

Bíró Bálint, Eger

168. Az a_0, a_1, a_2, ... valós számsorozatra teljesül, hogy $|a_n| = a_{n-1} + a_{n+1}$ bármely pozitív egész n esetén. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat periodikus! Határozzuk meg az a_{2001} értékét, ha $a_0 = 2000$ és $a_1 = 2001$!

169. Melyek azok az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre minden valós x esetén teljesül az

$$f(f(f(x))) - 2f(f(x)) + 2f(x) - x = 0$$

függvényegyenlet?

Dályay Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (150-154. feladatok)

150. Melyek azok a pozitív racionális számok, amelyek törtrésze megegyezik reciprokuk törtrészével?

Kondor László, Dunaújváros

Megoldás: Legyen egy megfelelő racionális szám $\frac{p}{q}$, és legyen $(p; q) = 1$. A feladat feltétele alapján

$$\frac{p}{q} - \frac{q}{p} = \frac{p^2 - q^2}{pq} = \frac{(p+q)(p-q)}{pq}$$

egész szám. Mivel p és q relatív prímek, ezért $(p; p+q) = (p; p-q) = (q; p+q) = (q; p-q) = 1$. Így a fenti tört értéke pontosan akkor egész, ha $p = q$. A feladat feltételeinek egyedül az 1 felel meg.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 10.

151. 2000-rel kezdődően legalább hány egymást követő pozitív egész számot kell összeszoroznunk, hogy a szorzat pontosan 2000 darab 0-ra végződjön?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Az első n darab pozitív egész szám szorzata annyi 0-ra végződik, amennyi a szorzat prímtényezős felbontásában az 5 hatványkite-

vője. Jelölje $f(n)$ ezt a számot. Azt az n pozitív egész számot keressük tehát, amelyre

$$f(n) - f(1999) = 2000.$$

Mivel

$$f(1999)=\left[\frac{1999}{5}\right]+\left[\frac{1999}{25}\right]+\left[\frac{1999}{125}\right]+\left[\frac{1999}{625}\right]=496,$$

ezért azon n természetes számra vagyunk kíváncsiak, amelyre $f(n) = 2496$.

Az $n=10000$ vizsgálata kézenfekvőnek látszik, ugyanis $\left[\frac{10000}{5}\right] = 2000$.

$$f(10000)=\left[\frac{10000}{5}\right]+\left[\frac{10000}{25}\right]+\left[\frac{10000}{125}\right]+$$
$$+\left[\frac{10000}{625}\right]+\left[\frac{10000}{3125}\right]=2499,$$

ami több, mint amire szükségünk van. Viszont $f(9999) = 2495$, így nincs megfelelő n természetes szám.

A megoldásból látható az is, hogy ha 2001 az első tényező és 10000 az utolsó, akkor ennek a 8000 tényezőnek a szorzata éppen 2000 darab 0-ra végződik.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

152. Az $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ egyenletnek az $[1; 2]$ intervallumban pontosan 1 valós gyöke van, jelöljük ezt α_n-nel. Igazoljuk, hogy az $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét!

Bencze Mihály, Brassó

I. megoldás: Legyen f_n: $[1; 2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n-1} - 1$. $n = 1$ esetén $f_1(2) = 0$. $n > 1$ esetén egyrészt $f_n(1) = -1$ és $f_n(2) \geq 1$, másrészt $f_n'(x) = nx^{n-2}(x - 1) + x^{n-2} > 0$, azaz az f_n függvénynek valóban pontosan egy zérushelye van az $[1; 2]$-on bármely pozitív egész n esetén.

Legyen tetszőleges 1-nél nagyobb n-re a megfelelő gyök $\alpha_n = 1 + t_n$, ahol $0 \leq t_n < 1$. Ekkor

$$0 = (1 + t_n)^n - (1 + t_n)^{n-1} = t_n(1 + t_n)^{n-1} - 1.$$

Ebből, alkalmazva a Bernoulli-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$1 = t_n(1 + t_n)^{n-1} \geq t^n(1 + (n - 1)t_n).$$

Átrendezve

$$(n - 1)t_n^2 + t_n - 1 \leq 0,$$

ahonnan, figyelembe véve, hogy $t_n \geq 0$,

$$0 \leq t_n \leq \frac{-1+\sqrt{4n+3}}{2(n-1)} < \frac{2\sqrt{n+1}}{2(n-1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1} = 0$, ezért a „rendőr-elv" miatt $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

Kaptuk tehát, hogy az $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

II. megoldás: Annak belátása, hogy a tekintett egyenletnek minden pozitív egész n esetén pontosan egy gyöke van az $[1; 2]$-on az előző megoldásban látottak alapján történik.

Legyen $n > 1$. Ekkor $1 < \alpha_n < 2$, ahonnan $0 < \frac{1}{\alpha_n} < 1$. Ebből adódik, hogy $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^k > \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^n$, ha $k < n$. Mivel α_n gyök, ezért

$$1 = \frac{1}{\alpha_n} + \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^n.$$

Így, ha $k < n$, akkor

$$1 < \frac{1}{\alpha_n} + \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^k,$$

vagy

$$\alpha_n^k \leq \alpha_n^{k-1} + 1.$$

A fentiek alapján felírhatóak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned}
\alpha_n^n &\leq \alpha_n^{n-1} + 1 \\
\alpha_n^{n-1} &\leq \alpha_n^{n-2} + 1 \\
\alpha_n^{n-2} &\leq \alpha_n^{n-3} + 1 \\
&\vdots \\
\alpha_n^2 &\leq \alpha_n + 1.
\end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenségek összeadásával adódik, hogy

$$\alpha_n^n \le \alpha_n + n - 1 < n + 1.$$

Az $\{\alpha_n\}$ sorozatra tehát teljesül, hogy

$$1 < \alpha_n < \sqrt[n]{n+1}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, ezért a „rendőr-elv" alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

Szász Róbert, Marosvásárhely

A megoldók száma: 6.

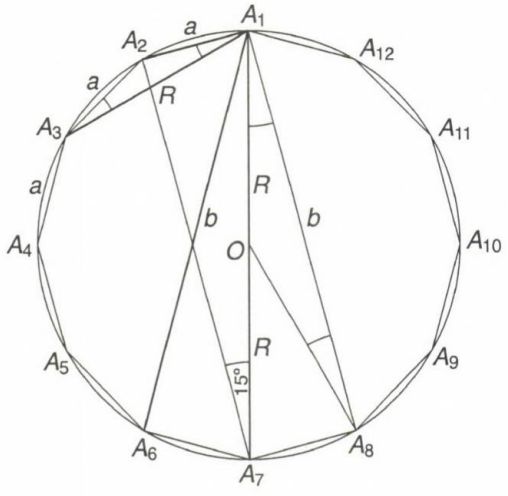
153. Egy szabályos tizenkétszög egymás után következő csúcsai A_1, A_2, ... A_{12}. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{A_1A_2^2} + \frac{1}{A_1A_6^2} = \frac{4}{A_1A_3^2}!$$

I. megoldás: Itt és a következő megoldások során is az *1. ábra* jelöléseit használjuk.

Ha R a tizenkétszög köréírt körének sugara, akkor $A_1A_2 = 2R\sin 15°$, $A_1A_3 = 2R\sin 30°$, $A_1A_6 = 2R\sin 75°$. Ezeket beírva a bizonyítandó egyenlőségbe, azt kell belátnunk, hogy

$$16 = \frac{1}{\sin^2 15°} + \frac{1}{\sin^2 75°}.$$



1. ábra

Mivel $\sin^2 15° + \sin^2 75° = \sin^2 15° + \cos^2 15° = 1$, ezért elegendő igazolni, hogy

$$1 = 16\sin^2 15°\cos^2 15°.$$

Ez viszont nyílvánvaló a kétszeres szög szinuszára vonatkozó összefüggés, és a $\sin 30° = \frac{1}{2}$ ismert tény alapján.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

II. megoldás: A koszinusztétel alapján

$$A_1A_2^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 30° = R^2\left(2 - \sqrt{3}\right),$$
$$A_1A_6^2 = 2R^2 + 2R^2\cos 30° = R^2\left(2 + \sqrt{3}\right),$$

és $A_1A_3^2 = R^2$.

A kapott kifejezéseket a bizonyítandó egyenlőségbe helyettesítve, majd R^2-tel osztva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 4.$$

A bal oldal közös nevezőre hozása után látható, hogy teljesül a feladat állítása.

Fitos László, Esztergom

III. megoldás: Vegyük észre, hogy az $A_1A_2A_3$ és A_1OA_8 háromszögek megfelelő szögei megegyeznek, ezért ezek a háromszögek hasonlók. Az *1. ábra* jelöléseit használva a szimmetria miatt $A_1A_8 = A_1A_6 = b$, és tudjuk, hogy $A_1A_3 = R$. A tekintett két háromszög hasonlósága alapján

$$\frac{R}{a} = \frac{b}{R},$$

ahonnan

$$R^2 = ab. \qquad (1)$$

Az $A_1A_7A_8$ háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tételéből adódóan

$$4R^2 = a^2 + b^2. \qquad (2)$$

A bizonyítandó egyenlőség az *1. ábra* jelöléseivel

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{R^2},$$

vagy átalakítva

$$R^2(a^2 + b^2) = 4a^2b^2. \qquad (3)$$

(1) és (2) alapján (3) azonosság, ezzel az állítást beláttuk.

A megoldók száma: 12.

154. Határozzuk meg az $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, $f(n) = \left[n + \sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$ függvény értékkészletét!

([x] jelöli az x szám alsó egészrészét.)

Megoldás: $f(n) = \left[n + \sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right] = n + g(n)$, ahol $g(n) = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}^+$. Néhány n-re meghatározva $g(n)$ értékét az a sejtés fogalmazódhat meg, hogy $g(n) = k + 1$, ha $\frac{k(k+1)}{2} < n \leq$

$\leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$. (1)

Ez $k = 0$ esetén nyilvánvaló.

Ha $k > 1$, akkor

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 \leq n \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

azaz

$$k(k+1) + 2 \leq 2n \leq (k+1)(k+2).$$

Megmutatjuk, hogy

$$k + 1 < \sqrt{k(k+1) + 2} + \frac{1}{2} < \sqrt{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{2} < k + 2.$$

Rendezve és négyzetre emelve

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 < k(k+1) + 2 < (k+1)(k+2) < \left(k + \frac{3}{2}\right)^2,$$

azaz

$$k^2 + k + \frac{1}{4} < k^2 + k + 2 < k^2 + 3k + 2 < k^2 + 3k + \frac{9}{4},$$

ami valóban teljesül minden pozitív egész k-ra. Ezzel beláttuk (1) érvényességét, így minden olyan n értékre, amelyre az (1)-beli feltétel igaz $f(n) = n + k + 1$. f értékkészlete tehát a pozitív egész számok halmaza, kivéve az $n = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ alakú számokat, ahol k végigfut a természetes számok halmazán. A kimaradt számok éppen a háromszögszámok, így mondhatjuk, hogy f a háromszögszámok kivételével minden pozitív egész értéket felvesz.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (150., 153.); Csorba Ferenc, Győr (150., 151., 153., 154.); Dályay Pál Péter, Szeged (150-154.); Fitos László, Esztergom (151., 153.); Horváth Géza, Zselíz (151., 153. 2 mód); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (150., 152., 153.); László Sándor, Szombathely (150., 151., 153. 2 mód); Schuler László, Budapest (150., 153., 154.); Simon József, Csíkszereda (150-154.); Szász Róbert, Marosvásárhely (150-154.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (150-152., 153. 2 mód, 154.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (150-154.).

Helyreigazítás

A 2000. év 5. számban Csorba Ferenc Hát, nem tudom..., Árokszállási Tibor Harmadfokú függvények szélsőérték vizsgálata elemi módon és dr. Darvasi Gyula Az általános talpponti háromszög területe cikkekben sajnálatos módon sok értelemzavaró hiba (műveleti jelek kimaradtak) került. Ezúton kérünk elnézést a szerzőktől és az olvasóktól, és a következőkben ismét közöljük az említett írásokat.

Csorba Ferenc

Hát, nem tudom...

(A szegedi Rátz László Vándorgyűlés záródolgozata)

Gondoltam, ha már záródolgozatot kell írni, akkor a lopott anyag mellé lopok egy címet is: Hát, nem tudom... Jiří Menzel azonos című könyve után szabadon. A tartalmi részhez az ötletet Pintér Lajos: „Így kell csinálni, vagy másképp...", illetve Szalay István: Feladatok kettős látásmódban című előadásai adták.

Az Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából (közkedvelt néven „zöld könyv") 2328-as számú feladata a következő:

Egy négyoldalú egyenes hasábról tudjuk, hogy magassága 1 m, alaplapja pedig olyan szimmetrikus trapéz, amelynek három oldala 60 cm hosszúságú. Mekkora lehet maximálisan a hasáb térfogata?

A megoldáskötetben a következőt találjuk:

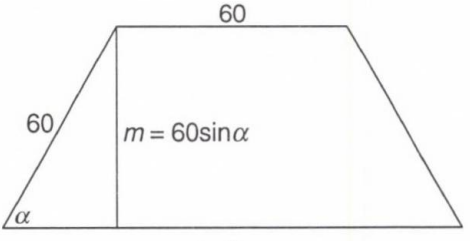
A hasáb térfogata akkor maximális, ha az alapterület is maximális. A trapéz hegyesszöge legyen α, ekkor a hosszabb alap: $60 + 60 \cdot 2\cos\alpha$, a magasság $60\sin\alpha$, a terület pedig $\frac{60 + 60 + 2 \cdot 60\cos\alpha}{2} \cdot 60\sin\alpha =$ $= 60^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$. Az $f(\alpha) = (1 + \cos\alpha)\sin\alpha$ függvény maximumát kell meghatároznunk a $\left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$ intervallumban. A derivált 0 helye a $-\sin^2\alpha + (1 + \cos\alpha)\cos\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 =$ $= 0$ egyenletből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ esetén $\alpha = \frac{\pi}{3}$, s mivel itt a derivált pozitívból negatívba megy át, helyi maximum van, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; ez nagyobb, mint az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékek, s így abszolút maximum is. A maximális térfogat $\frac{100 \cdot 60^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} =$ $= 467\,653{,}72\ \text{cm}^3$.

Ezt a feladatot akár érettségi írásbelin is ki lehetne tűzni. Kíváncsi lennék, hány olyan tanuló akadna, aki nem tanult differenciálszámítást, s mégis ezzel a módszerrel oldaná meg. (Meggyőződésem, hogy a „zöld könyv" rengeteget árt a matematikának. Az utolsó évben (jó esetben) a legtöbben nem matematikát, hanem „zöld könyvet" tanítunk.)

Ez egyik kedvenc feladatom, szinte minden osztályban megbeszéljük, mégsem örülnék, ha tanítványaim érettségin találkoznának vele.

A feladat nagyon szép, ha lenne elég idő, ezen keresztül meg lehetne ismertetni diákjainkat a matematika szépségeinek egy jó részével. Nyilvánvaló, hogy a térfogat csak az alaplap területétől függ. Meg szoktam kérdezni, milyen eredményt várunk. A diákok szinte kivétel nélkül négyzetre tippelnek. Ezután tükrözzük a trapézt az ismeretlen oldalára. Olyan hatszöget kapunk, amelynek minden oldala egyenlő. Itt már az a sejtés, hogy akkor lesz a terület maximális, ha a hatszög szabályos.

Elérkeztünk egy híres problémához, az ún. izoperimetrikus feladatokhoz. Szokás Dido-féle problémának is nevezni. Dido Muton türoszi király leánya volt, atyja halála után nagybátyjának, Akerbasnak, Melkart papjának lett a felesége. Dido fiútestvére Pügmalion, Türosz királya kapzsiságból megölette sógorát, Dido kincseivel menekült, új hazát keresett. Utika közelében kötött ki Afrika északi partján, és Jarbas numí-



1. ábra

diai királytól megvásárolt egy várat, amelynek Borza nevét a görögök Bürsának ejtettek, ami bőrt jelent. Innen eredhet az a monda, hogy Dido csak annyi földet kért Jarbastól, amit egy ökör bőre betakar, de ezt a bőrt vékony csíkokra hasíttatta, úgy hogy jókora területet nyert. (Nagyon valószínű, hogy Dido azonos Astarte istennővel, Karthago védőasszonyával, akit történelmi alakká formált át a néphagyomány.)

A matematikusoknak ezzel a következő kérdést tette fel: adott kerületű síkidomok közül melyiknek a területe a legnagyobb?

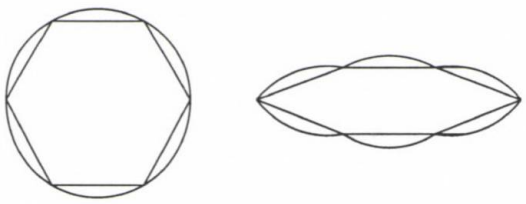
Ezt az alapvető kérdést Jakob Steiner svájci matematikus oldotta meg először. Több bizonyítást is adott a következő tételre: Az összes egyenlő kerületű síkidom közül a kör területe a legnagyobb, illetve az összes egyenlő területű síkidom közül a körnek legkisebb a kerülete. (A Steiner-féle bizonyításokban vannak „gyenge" pontok, de ezeket W. Blaschke: Kreis und Kugel című könyvében megoldotta, a bizonyításokat „teljesen szigorúvá" tette.)

Elfogadva ezt az eredményt, megmutatjuk, hogy az egyenlő oldalú hatszögek közül a szabályos hatszög területe a legnagyobb. (A bizonyítás elmondható tetszőleges n oldalú sokszögre.)

Elegendő konvex hatszögeket tekinteni, ez nyilvánvaló. Tekintsük a 60 cm oldalú szabályos hatszöget és a köré írható kört. Ebből a körből a szabályos hatszög oldalai egy-egy körszeletet vágnak le, amelyeket illeszthetünk a 60 cm oldalakkal rendelkező nem szabályos hatszög oldalaihoz. Kapunk egy síkidomot, ami nem kör, de kerülete megegyezik a kör kerületével. Elhagyva mindkettőből a körszeleteket, látható, hogy a szabályos hatszög területe lesz a nagyobb.

Ágyúval lőttünk a verébre, de mentségünkre szól, hogy eltaláltuk.

Nagyon szép a feladat. Ha lenne idő, vissza lehetne térni Pitagorasz tételéig, átismételni a magasság- és a befogótételt, kitérni a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségre. Elegendő lenne megmutatni, hogy ha a, b, c és d pozitív valós számok, akkor $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ mindig fennáll, egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b = c = d$, valamint hogyan lehet ezt szélsőérték feladatok megoldásánál alkalmazni (és hogyan nem!). Mindezeket feltételezve oldjuk meg a feladatot másképp!



2. ábra

A trapéz területe:

$$T = \frac{a+60}{2}m,$$

$$m^2 = 60^2 - x^2 = 60^2 - \left(\frac{a-60}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(60 + \frac{a-60}{2}\right)\left(60 - \frac{a-60}{2}\right) = \frac{60+a}{2}\,\frac{180-a}{2}.$$

A trapéz területe helyett vizsgálhatjuk a terület négyzetét:

$$T^2 = \left(\frac{a+60}{2}\right)^3 \frac{180-a}{2} =$$

$$= \frac{27}{16}\,\frac{a+60}{3}\,\frac{a+60}{3}\,\frac{a+60}{3}(180-a).$$

Alkalmazhatjuk a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget!

$$T^2 \leq \frac{27}{16}\left(\frac{3\dfrac{a+60}{3} + (180-a)}{4}\right)^4 = \frac{27}{16}60^4 =$$

$$= \text{állandó}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{a+60}{3} = 180 - a$, azaz $a = 120$, a trapéz a szabályos hatszög „fele".

A változatosság kedvéért oldjuk meg még egyszer: az 1. ábra jelöléseivel:

$$T = \frac{60 + (60 + 2x)}{2}m =$$

$$(60 + x)m = (60 + 60\cos\alpha)60\sin\alpha =$$

$$= 60^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

Elegendő tehát a $\sin\alpha(1 + \cos\alpha) := K$ kifejezés legnagyobb értékét meghatározni. Itt vizsgálhatjuk K helyett K^2-et.

$$K^2 = \sin^2\alpha(1 + \cos\alpha)^2 =$$

$$= (1 - \cos^2\alpha)(1 + \cos\alpha)^2 =$$

$$= (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3 =$$

$$= 27(1-\cos\alpha)\frac{1+\cos\alpha}{3}\frac{1+\cos\alpha}{3}\frac{1+\cos\alpha}{3} \le$$

$$\le 27\left(\frac{(1-\cos\alpha)+3\frac{1+\cos\alpha}{3}}{4}\right)^4 = 27\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$= \text{állandó},$$

mint az előbbi megoldásban. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $1-\cos\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{3}$, a feltételeket figyelembe véve $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Így kell csinálni, vagy másképp?
Hát, nem tudom...

Árokszállási Tibor

Harmadfokú függvények szélsőérték vizsgálata elemi módon

A szélsőérték problémák egyre inkább az érdeklődés homlokterébe kerülnek. Alig van olyan felvételi feladatsor, amely ne tartalmazna ilyen jellegű kérdést. Ez az írás azt mutatja be, hogy miként lehet – differenciálszámítás alkalmazása nélkül – a harmadfokú polinomok vizsgálatára vezető szélsőérték problémákat megoldani.

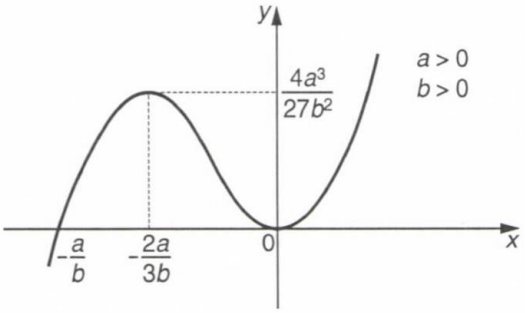
Egy általános probléma megoldása során gyakran célravezető az, ha egy speciális eset tárgyalásával kezdünk. Tegyük most is ezt, és tekintsük az $f(x) = ax^2 + bx^3$ alakú függvényeket, ahol a és b pozitív valós konstansok, f értelmezési tartománya pedig a valós számhalmaz! Az $f(x) = x^2(a + bx)$ alak jól mutatja, hogy függvényünknek csak helyi szélsőértékei lehetnek, hiszen növekvő pozitív x-ek esetén a függvény minden határon túl növekszik, $\left(-\frac{a}{b}\right)$-nél kisebb, csökkenő x-ek esetén pedig minden határon túl csökken. Helyi szélsőértékre tehát csakis a $\left(-\frac{a}{b}\right) \le x \le 0$ intervallumban számíthatunk. Alakítsuk most függvényünket a következő módon:

$$f(x) = x^2(a+bx) = \frac{4}{b^2}\left(-\frac{b}{2}x\right)\left(-\frac{b}{2}x\right)(a+bx)!$$

Látható, hogy a vizsgált tartományban a szorzat utolsó három tényezője – a tartomány végpontjait leszámítva – pozitív. Alkalmazható tehát a számtani és mértani közép jól ismert kapcsolata.

$$f(x) \le \frac{4}{b^2}\left(\frac{-\frac{b}{2}x-\frac{b}{2}x+a+bx}{3}\right)^3 = \frac{4a^3}{27b^2}$$

Az egyenlőség a tényezők egyenlősége esetén meg is valósul, nevezetesen $x = -\frac{2a}{3b}$ esetén. Tehát az f függvénynek a vizsgált tartományon maximuma van. Mivel függvényünk a $x = 0$ helyen 0 értékű, és minden más $\left(-\frac{a}{b}\right)$-nél nagyobb x esetén pozitív, ezért az $f(x) = 0$ szükségképpen helyi minimum. A következő ábra az f függvény vázlatos grafikonját mutatja.



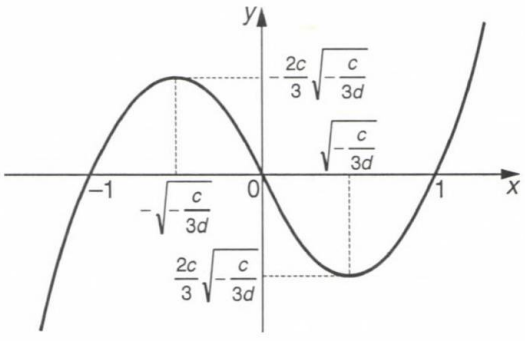
Abban az esetben, ha az $f(x) = ax^2 + bx^3$ függvény konstansainak előjelében változás történik, lényegileg a fenti gondolatmenetet kell megismételnünk. Eltérés csak abban lesz, hogy ezekben az esetekben megváltozik a függvény menete. Például, ha a konstansok negatív előjelűek, akkor $x = \left(-\frac{2a}{3b}\right)$-nél helyi minimum, 0-nál helyi maximum adódik. Általában az mondható el most már, hogy az $f(x) = ax^2 + bx^3$ alakú függvényeknek mindig van két különböző típusú helyi szélsőértéke, a szélsőértékek mindig $x = 0$-nál és $x = \left(-\frac{2a}{3b}\right)$-nél vannak, a szélsőértékek típusát és előjelét pedig a konstansok előjele (nyilván egyik konstans sem zérus) dönti el.

A továbbiakban ki fog derülni, hogy az $f(x) = cx + dx^3$ alakú függvények szélsőérték vizsgálata visszavezethető az előzőleg már tárgyalt típusú függvények vizsgálatára. Először is megjegyzendő, hogy ha a konstansok azonos előjelűek, akkor nyilvánvalóan semmilyen szélsőértékről sem beszélhetünk, mert ez esetben – a kitevők azonos paritása miatt – f az egész értelmezési tartományon szigorú monoton. Tegyük fel tehát ezek után, hogy a konstansok nem azonos előjelűek! Alkalmazzuk most az alábbi helyettesítést!

$$x = \sqrt{-\frac{c}{3d}} + t$$

Rövid számolás után az adódik, hogy $f(x) = \frac{2c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3d}} + d\left(3\sqrt{-\frac{c}{3d}}t^2 + t^3\right)$. Ezzel a helyettesítéssel el is értük célunkat, hiszen a $K(t) = d\left(3\sqrt{-\frac{c}{3d}}t^2 + t^3\right)$ függvény csak egy konstansban tér el f-től. Az előzőleg mondottak szerint K-nak $t = 0$-nál és vele f-nek $x = \sqrt{-\frac{c}{3d}}$-nél helyi szélsőértéke van, melynek értéke $f\left(\sqrt{-\frac{c}{3d}}\right) = \frac{2c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3d}}$. Vegyük most észre, hogy a jelenleg vizsgált $f(x) = cx + dx^3$ függvény páratlan! Ez azt jelenti, hogy $x = -\sqrt{-\frac{c}{3d}}$-nél szintén helyi szélsőérték van, amely $f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3d}}\right) = -\frac{2c}{3}\sqrt{-\frac{c}{3d}}$.

A szélsőérték típusa attól függ, hogy a konstansok előjelviszonyai milyenek. Ha például c negatív és d pozitív, akkor $x = \sqrt{-\frac{c}{3d}}$-nél helyi minimum, ellenkező esetben ugyanitt helyi maximum lesz. Az alábbi vázlatos grafikon az első esetet mutatja.



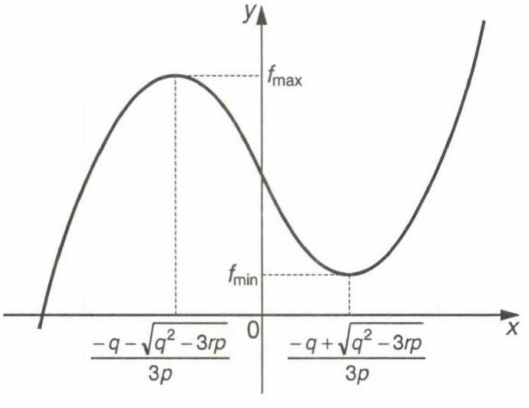
Térjünk rá ezek után az általános eset vizsgálatára, vagyis nézzük az $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ alakú függvényeket! Azt lehet megmutatni, hogy ezek alkalmas helyettesítésekkel megint csak a már előzőleg tárgyalt alakúakká transzformálhatók. Alkalmazzuk az alábbi helyettesítést!

$$x = t - \frac{q}{3p}$$

Rövid számolást követően adódik a következő alak:

$$f(x) = pt^3 + \left(r - \frac{q^2}{3p}\right)t + \frac{2q^3}{27p^2} - \frac{rq}{3p} + s$$

Ebben a kifejezésben már másodfokú tag nincs. Helyi szélsőérték akkor lehetséges, ha az elsőfokú és a harmadfokú tag előjele különböző. Legyen pl. $p > 0$ és $\left(r - \frac{q^2}{3p}\right) < 0$. Ekkor átrendezés után adódik, hogy $q^2 > 3pr$. Ugyanez az összefüggés következik akkor is, ha az együtthatók előjelét megfordítjuk. Azt mondhatjuk tehát, hogy a legutóbbi reláció teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy a harmadfokú függvénynek létezzen helyi szélsőértéke. Használjuk most fel az előző pont eredményét, melynek értelmében, ha bevezetjük a $t = k - \frac{\sqrt{q^2 - 3rp}}{3p}$ helyettesítést, akkor egy olyan alakot kell kapnunk, amelynek $k = 0$-nál, azaz $t = -\frac{\sqrt{q^2 - 3rp}}{3p}$-nél helyi szélsőértéke van, és a $g(t) = pt^3 + \left(r - \frac{q^2}{3p}\right)t$ függvény páratlansága miatt $t = \frac{\sqrt{q^2 - 3rp}}{3p}$ is helyi szélsőérték hely lesz. Az eredeti $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ harmadfokú függvénynek tehát $x_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 3rp}}{3p}$-nél helyi szélsőértékei vannak. A szélsőértékek típusa és értéke az együtthatóktól függ. Az alábbi vázlatos ábra egy lehetséges esetet mutat.



Végezetül nézzünk meg egy konkrét példát! Tekintsük az $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$!

Alkalmazzuk először az $x = t - \frac{2}{3}$ helyettesítést! Ekkor adódik az $f\left(t - \frac{2}{3}\right) = t^3 - \frac{1}{3}t - \frac{83}{27}$ alak. Láthatóan a köbös tag és az elsőfokú tag együtthatója ellentétes előjelű, van tehát szélsőérték. Legyen ezek után $t = k + \frac{1}{3}$! Ekkor az $f\left(k - \frac{1}{3}\right) = k^3 + k^2 - \frac{85}{27}$ kifejezés jön ki. Alkalmazzuk ezek után a számtani és mértani közép közti összefüggést!

$$k^3 + k^2 - \frac{85}{27} = 4\left(-\frac{k}{2}\right)\left(-\frac{k}{2}\right)(k+1) - \frac{85}{27} \le$$

$$\le 4\left(\frac{-\frac{k}{2} - \frac{k}{2} + k + 1}{3}\right)^3 - \frac{85}{27} = -3.$$

Tehát eredeti függvényünk maximuma (–3), és ez $x = -1$-nél meg is valósul. Minimumot akkor kapunk, ha $k = 0$, vagyis $x = -\frac{1}{3}$. A minimum értéke pedig $\left(-\frac{85}{17}\right)$ lesz.

Az a tény, hogy a harmadfokú függvények „megadják magukat" az elemi módszereknek, semmiképp sem jelenti azt, hogy az esetek többségében a deriválás egyszerű algoritmusa ne lenne sokkal gyorsabb. Más kérdés persze, hogy a differenciálszámítás alkalmazása már meglehetősen magas matematikai tájékozottságot tételez fel. Középiskolás fokon az elemi utak keresése mindig izgalmasabb. Ha pedig arra gondolunk, hogy a magasabb fokszámú polinom függvények zérushelyeinek meghatározása elvi akadályokba ütközik, akkor azt mondhatjuk, a deriválás módszerének alkalmazása nem is sokkal magasabb rendű. Talán még az is lehetséges, hogy az a szélsőérték probléma, amely a differenciálszámítás alkalmazásával megoldható, szükségképpen olyan, hogy található elemi módszer is a megoldásához.

Dr. Darvasi Gyula

Az általános talpponti háromszög területe

A talpponti háromszög leginkább mint a hegyesszögű háromszögbe írható minimális kerületű háromszög ismert, melynek csúcsai az adott hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai (1. ábra). Minthogy a hegyesszögű háromszög magasságvonalai a háromszögön belül haladnak és egy pontra – a háromszög magasságpontjára – illeszkednek, ezért a talpponti háromszög csúcsai egyrészt az eredeti háromszög oldalainak belső pontjai, másrészt a háromszög belsejében lévő magasságpontnak a háromszög oldalaira vonatkozó merőleges vetítésével is származtathatók. Ez a származtatási mód ad lehetőséget a talpponti háromszög általános értelmezésére.

Legyen a P pont egy adott ABC háromszög síkjának tetszőleges pontja, s jelölje A_1, B_1, illetve C_1 a P pontból a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, illetve $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjait (2. ábra). Ekkor az $A_1B_1C_1$ (esetleg elfajuló) háromszöget az ABC három szög P pontra vonatkozó általános talpponti háromszögének nevezzük. Azonnal nyilvánvaló, hogy ha a P pont az ABC háromszög magasságpontja, akkor a közönséges talpponti háromszöghöz jutunk vissza. Elfajuló eset pontosan akkor adódik, ha a P pont rajta van az ABC háromszög $k(O, R)$ körülírt körén, s ekkor az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre – a P ponthoz tartozó Simson-egyenesre – illeszkednek.

Az általános talpponti háromszög területének kiszámításához ismernünk kell két oldalának hosszát, és az általuk közbezárt szög nagyságát.

Elsőként az általános talpponti háromszög oldalait határozzuk meg. Ehhez felhasználjuk, hogy a B_1 és C_1 pontok előállítási módja miatt a P pont rajta van az AB_1C_1 háromszög köré írható körön, melynek egyik átmérője az $\overline{AP}$ szakasz. Így az AB_1C_1 valamint az ABC háromszögekre a szinusztételt alkalmazva

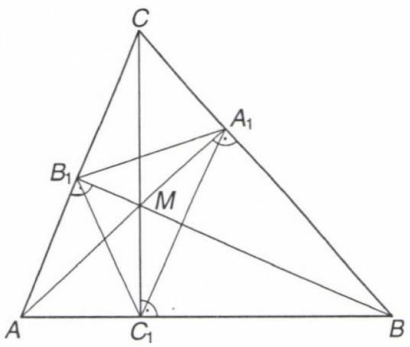
$$AP = \frac{B_1C_1}{\sin A\sphericalangle} \quad \text{és} \quad 2R = \frac{BC}{\sin A\sphericalangle} = \frac{a}{\sin A\sphericalangle},$$

ahonnan

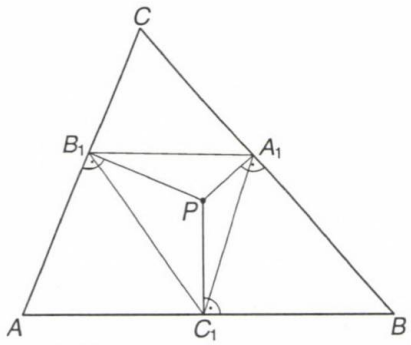
$$B_1C_1 = \frac{a}{2R} \cdot AP.$$

Észrevehető továbbá, hogy a P pont rajta van még a BA_1C_1 és CA_1B_1 háromszögek köré írható $\overline{BP}$ illetve $\overline{CP}$ átmérőjű körökön is, amiből az előbbihez hasonló módon kaphatók az $A_1C_1 = \frac{b}{2R} \cdot BP$ és az $A_1B_1 = \frac{c}{2R} \cdot CP$ összefüggések.

Második lépésként foglalkozzunk az $A_1C_1B_1\sphericalangle$-gel. Ehhez egyelőre tételezzük fel, hogy a P pont az ABC háromszögön belül van, és jelöljük A'-vel az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenes és az ABC három-



1. ábra



2. ábra

szög köré írható $k(O, R)$ körvonal A-tól különböző metszéspontját (3. ábra).
Ekkor egyrészt

$$AP \cdot PA' = R^2 - OP^2,$$
$$PA'B\sphericalangle = AA'B\sphericalangle = ACB\sphericalangle \text{ és}$$
$$\frac{\sin A'BP\sphericalangle}{\sin PA'B\sphericalangle} = \frac{PA'}{BP},$$

másrészt az

$$APB\sphericalangle = PA'B\sphericalangle + A'BP\sphericalangle =$$
$$= AA'B\sphericalangle + A'BP\sphericalangle = ACB\sphericalangle + A'BP\sphericalangle,$$

valamint az

$$APB\sphericalangle = APC_1\sphericalangle + C_1PB\sphericalangle =$$
$$= AB_1C_1\sphericalangle + C_1A_1B\sphericalangle =$$
$$= (B_1CC_1\sphericalangle + CC_1B_1\sphericalangle) + (C_1CA_1\sphericalangle + A_1C_1C\sphericalangle) =$$
$$= (B_1CC_1\sphericalangle + C_1CA_1\sphericalangle) + (A_1C_1C\sphericalangle + CC_1B_1\sphericalangle) =$$
$$= B_1CA_1\sphericalangle + A_1C_1B_1\sphericalangle = ACB\sphericalangle + A_1C_1B_1\sphericalangle$$

összefüggésekből $A_1C_1B_1\sphericalangle = A'BP\sphericalangle$ kapható.

Mindezek alapján az $A_1B_1C_1$ általános talpponti háromszög területe:

$$t(A_1B_1C_{1\triangle}) = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin A_1C_1B_1\sphericalangle =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot AP}{2R} \cdot \frac{b \cdot BP}{2R} \cdot \sin A'BP\sphericalangle =$$
$$= \frac{ab}{8R^2} \cdot AP \cdot BP \cdot \frac{PA' \cdot \sin ACB\sphericalangle}{BP} =$$
$$= \frac{ab}{8R^2} \cdot AP \cdot PA' \cdot \frac{c}{2R} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} \cdot \frac{abc}{4R} =$$
$$= \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} \cdot t(ABC_\triangle)$$

A fenti levezetés ugyanezen képletet adja, ha a P pont az ABC háromszög köré írható körön belül van, vagy arra illeszkedik. Ha viszont $OP > R$, akkor az $A_1C_1B_1\sphericalangle$-gel kapcsolatos előbbi levezetés kissé bonyolultabb, de hasonlóképpen elvégezhető, s ekkor az $A_1B_1C_1$ általános talpponti háromszög területére a

$$t(A_1B_1C_{1\triangle}) = \frac{OP^2 - R^2}{4R^2} \cdot t(ABC_\triangle)$$

képlet adódik. Megállapítható tehát, hogy adott ABC háromszög P pontra vonatkozó általános talpponti háromszögének területe arányos a P pontnak az ABC háromszög köré írható $k(O, R)$ körre vonatkozó hatványával, és rögzített OP esetén a $k(O, R)$ körrel koncentrikus körvonal bármely pontjához tartozó talpponti háromszög területe ugyanakkora.

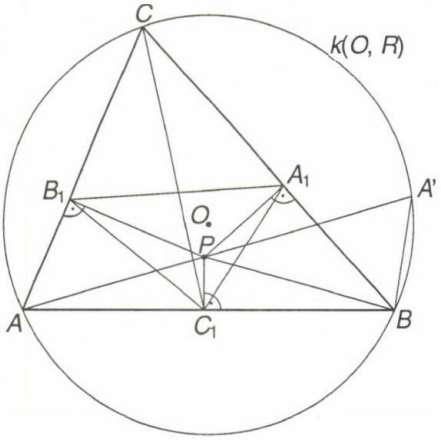
Az általános talpponti háromszög területére kapott fenti képlet ismeretében az [5]-ben megadott feladat (4. ábra) megoldása a következő:

$$\frac{t(EFD_\triangle)}{t(ABC_\triangle)} = \frac{4 \cdot t(A_1B_1C_{1\triangle})}{t(ABC_\triangle)} = \frac{R^2 - OP^2}{R^2} \le 1,$$

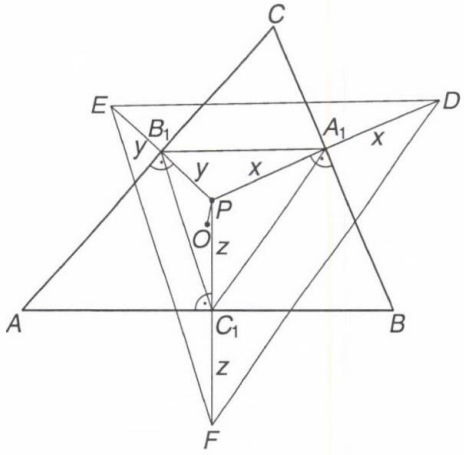
ahol egyenlőség pontosan akkor van, ha $P = O$.

Irodalom

[1] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába
[2] Pelle B.: Geometria
[3] Reimenn I.: A geometria és határterületei
[4] H.S.M.Coxeter – S.L.Greitzer: Az újra felfedezett geometria
[5] A Matematika Tanítása, 2. szám (2000), 21. oldal, 131. feladat.



3. ábra



4. ábra

Matematika tankönyvcsalád az első osztálytól az érettségiig Sokszínű matematika 1-12.

A Mozaik Kiadó 2001-ben új szemléletű és a kerettantervi követelményeknek is megfelelő matematika tankönyvsorozatot jelentet meg. A teljes közoktatási időszakot átfogó, és ebben az évben az 1., 5. és 9. évfolyamok számára egyszerre induló tankönyvcsalád legfőbb célja az, hogy a sokak által ma is rettegett tantárgyat minden életkorban a tanulók alkotó fantáziáját is megmozgatva **játékosan és színesen, ugyanakkor kellő szakmai igényességgel** alapozza meg. A természeténél fogva szigorú logikai felépítésű tárgy esetén fontos szempont volt, hogy a tankönyvcsalád teljes legyen, vagyis az első osztálytól egészen a tizenkettedik végéig tudatosan és következetesen építkezzen. Ezért a teljes tankönyvcsaládot olyan alkotószerkesztői bizottság (tagjai: Csordás Mihály, Kosztolányi József, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István) készíti elő, amelynek szakmai felkészültsége és tanítási tapasztalata is biztosítéka lehet a színvonalas munkának.

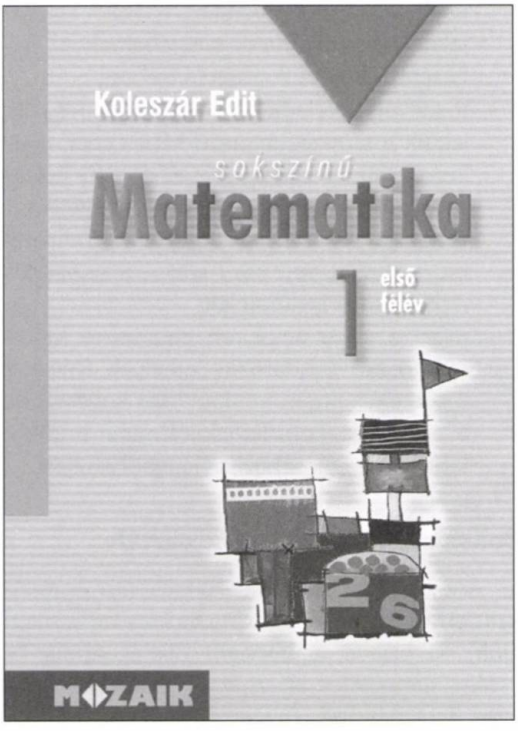
Sokszínű matematika 1. osztály

A tankönyvcsalád első osztályos kötetei heti 4 vagy 5 (esetleg 6) óra esetén egyaránt alkalmazhatók. Egyértelműen vannak jelölve azok az anyagrészek, feladatok, amelyeket csak az emelt óraszám esetén kell tanítanunk, a továbbhaladáshoz nem feltétlenül szükségesek. Ezek a feladatok heti 4 óra esetén szorgalmi feladatként is szolgálhatnak.

A kerettanterv által kiemelt legfontosabb területek, melyek érvényesülésére a tankönyvcsalád is külön hangsúlyt fektet:

- *számolási készség fejlesztése*
- *sík- és térbeli tájékozódási képesség formálása*
- *geometriai* ***szemlélet*** *kialakítása (nem pedig geometriai ismerethalmaz nyújtása!)*
- *problémalátás, problémamegoldó gondolkodás fejlesztése*
- *a valóság és a matematika kapcsolata*

A kerettanterv szerint az alsó tagozatban *a tanító átvezeti a kisgyermeket az óvoda játékközpontú tanulási tevékenységeiből a tantárgy- és tanórarendszerű iskolai tanulás tevékenységeibe.* Ez nem azt jelenti, hogy a játékot el kell hagyni, annak meg kell maradnia! Minden témakör alkalmas arra, hogy a gyakorlást játékos formában, sokféleképpen végezzük.



Az alsó tagozatos tankönyvcsalád legfontosabb jellemzői:

- alkalmazkodik a kerettantervhez, a csökkentett óraszámokhoz;
- kapcsolódik a Mozaik Kiadó 2001-ben megjelenő alsó tagozatos Integrált tankönyvcsaládjához (egységes jelrendszer, ugyanaz a szereplő; képanyagában, a szöveges feladatok témáiban időben is kapcsolódik az olvasókönyvhöz), de természetesen külön is használható;
- a magasabb évfolyam tankönyvei (2., 3., 4. osztály) akkor is használhatóak, ha az előző évfolyamon nem abból tanultak a gyerekek;
- pontos matematikai fogalmakkal dolgozik úgy, hogy figyelembe veszi a gyerekek életkorát;
- előkészíti és megalapozza a tankönyvcsalád felső tagozatos matematikakönyveit;
- gyakorló feladataival segíti a délutáni és otthoni munkát, a differenciált foglalkozást;
- a sok gondolkodtató, és legkülönbözőbb módszerekkel megoldható feladattal nagymértékben fejleszti a gondolkodást, a kreativitást, ugyanakkor a matematikából gyengébb képességű gyerekek is kellő tapasztalatot és gyakorlatot szerezhetnek a „nehezebb" feladatok megoldásában;
- a szöveges feladatok nagymértékben fejlesztik a szövegértelmező képességet, gyakoroltatják a lényegkiemelést, ami nélkül a felső tagozatos munka elképzelhetetlen;
- biztosítja a többi tantárgy (természetismeret, technika, rajz stb.) számára szükséges matematikai ismereteket;
- mind a négy évfolyam tankönyve tartalmaz olyan feladatokat, amelyek fejlesztik a gyerekek finommanipulációs képességét, a szem-kéz koordinációját, ami a többi tantárgy tanulásához is elengedhetetlen.

Sokszínű matematika 5. osztály

Az 5. osztályos *Matematika* tankönyv és munkafüzet valóban **sokszínű:** a tartalmilag is megújult, változatos tananyagot ötletes ábrák és vidám, hangulatos illusztrációk teszik szemléletessé és érdekessé. A szerzők a hagyományos matematikaoktatás értékeit megőrizve a kerettantervnek megfelelően új, korszerű ismeretekkel bővítették a tananyagot.

Az egész tankönyvcsaládra jellemző spirális felépítésű tananyag folyamatosan, és az életkori sajátosságoknak megfelelően alapozza meg és bővíti a matematikai fogalomrendszert.

Az ötödikes tankönyv és munkafüzet fő célja, hogy a matematikai gondolkodást minél változatosabban fejlessze, ezért:

- a matematikai „felfedeztetés" és a fogalmak kialakítása a tanulók gyakorlati tapasztalataiból indul ki, illetve feladatokhoz kapcsolódóan történik;
- a tartalmilag eltérő fejezeteket is összekapcsolja a feladatanyag azonos tematikája;
- minden fejezetben rendszeresen szerepelnek és visszatérnek a logikus gondolkodást és a kombinatorikus szemléletmódot gyakoroltató feladatok;
- kiemelt hangsúlyt kap a térszemlélet fejlesztése, ami az általános iskolai anyagból eddig teljesen hiányzott;
- rendszeresen és visszatérően szerepelnek az anyagban olyan feladatok, amelyek a statisztikus szemléletet és a helyes becslés képességét fejlesztik;
- a tankönyv sok és változatos matematikai (újdonságként például valószínűségi) játékkal színesíti az anyag feldolgozását;
- a könyv és munkafüzet nemcsak tartalmában, hanem felépítésében is nagyon szemléletes, rengeteg színes ábrával és képpel illusztrálja és segíti a matematikai anyagot.

A könyvhöz tartozó munkafüzet tovább bővíti a tankönyv módszertanilag változatos feladatanyagát.

A tankönyv használatát megkönnyíti a feladatok megoldását és a változatos módszertani ötleteket tartalmazó tanári kézikönyv.

Sokszínű matematika 9. osztály

Gimnáziumi és szakközépiskolai tankönyv

A gimnáziumok, illetve szakközépiskolák 9. osztálya számára írt *Matematika* tankönyv **tartalmában és szemléletében maradéktalanul megfelel a kerettanterv előírásainak.**

A könyv a tananyagot teljesen újszerűen tárgyalja, különös gondot fordítva arra, hogy

a fogalmak bevezetése gyakorlatközpontú és szemléletes legyen. A szerzők alapvetően arra törekedtek, hogy az új fogalmakat, tételeket példákon, feladatokon keresztül előkészítve, induktív módon vezessék be. A kerettanterv követelményeivel összhangban a könyvben csak az előírt követelményeknek megfelelő tételek bizonyítása szerepel, de ezen túl valamennyi megemlített tétel szemléletes, példákkal illusztrált bemutatása is megtalálható.

A fejezetek végén található feladatok az új ismeretek változatos alkalmazását igénylik különböző típusú probléma-szituációkban. Ezzel nemcsak a tanultak mélyebb megértését és elsajátítását, hanem a tanulók problémaérzékenységének és problémamegoldó gondolkodásának fejlesztését is segítik.

A könyvben a kerettanterven kicsit túlmutató, a felzárkóztatásra és a tehetséggondozásra lehetőséget nyújtó ismeretek és feladatok is találhatók, így az az átlagos és az azt meghaladó érdeklődésű osztályok számára is jól használható. A könyvben a kerettantervi törzsanyagot meghaladó ismeretek, feladatok **tipográfiailag jól elkülönítetten** jelennek meg.

A könyv nemcsak tartalmában, hanem felépítésében is nagyon **szemléletes,** rengeteg színes ábrával és képpel illusztrálva segíti „kézzelfoghatóvá tenni" a matematikai anyagot.

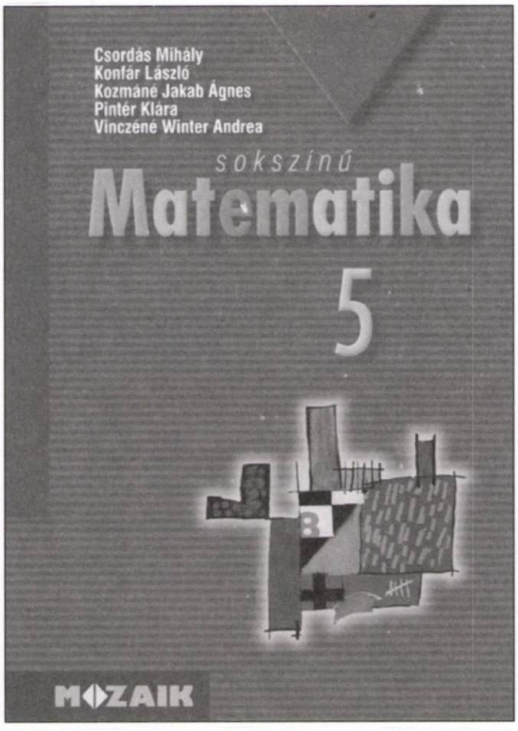
Sokszínű matematika 1. osztály 1. félév munkatankönyv (*Szerző: Koleszár Edit*), megjelenik: 2001.

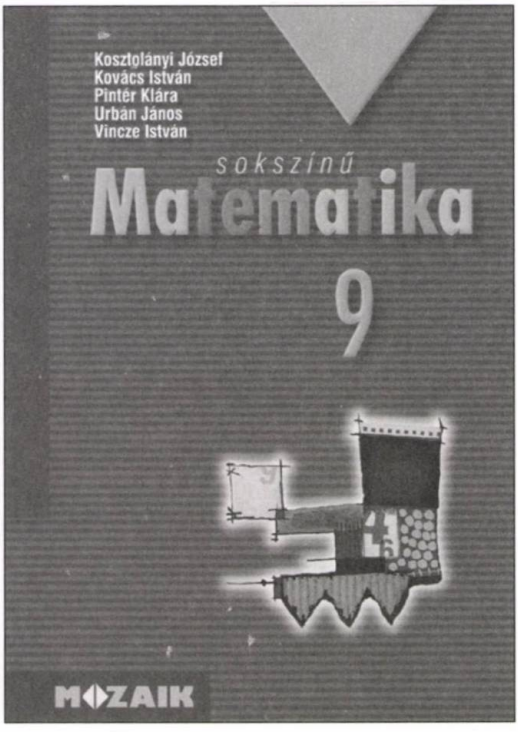
Sokszínű matematika 1. osztály 2. félév munkatankönyv (*Szerző: Koleszár Edit*), megjelenik: 2001.

Sokszínű matematika 5. osztály tankönyv (*Szerzők: Csordás Mihály, Konfár László, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vinczéné Winter Andrea*), megjelenik: 2001.

Sokszínű matematika 5. osztály munkafüzet (*Szerzők: Csordás Mihály, Konfár László, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vinczéné Winter Andrea*), megjelenik: 2001.

Sokszínű matematika 9. osztály tankönyv (*Szerzők: Kovács István, Kosztolányi József, Pintér Klára, dr. Urbán János, Vincze István*), megjelenik: 2001.



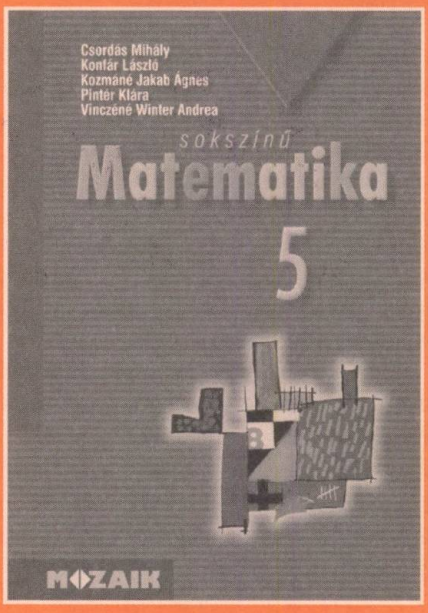


KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

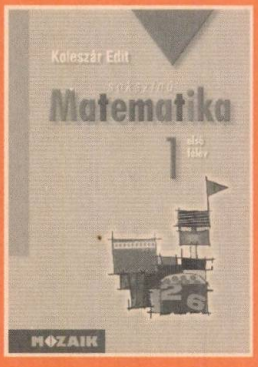
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

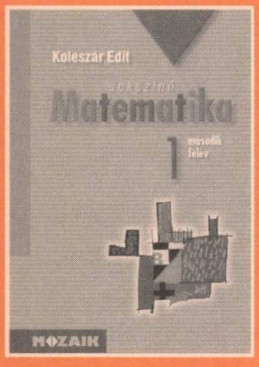
színes tankönyvsorozat 2001-ben az 1., 5. és 9. osztályos kötetekkel indul. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

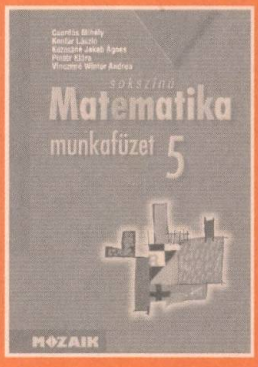


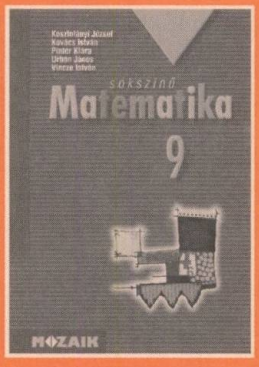
A kötetek szerzői: *1-4. osztály:* Koleszár Edit; *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A TANKÖNYVCSALÁD NÉHÁNY TOVÁBBI KÖTETE









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK X 2

Egy különleges számtáblázatról

(Holló-Szabó Ferenc)

Beszámoló a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

(Dr. Kántor Sándorné)

Heron képlete I.

(Udvari Tibor)

IX. ÉVFOLYAM 2001 2

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 980 Ft
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

Egy különleges számtáblázatról
Holló-Szabó Ferenc
doktorandusz, Budapest

Beszámoló a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről
Dr. Kántor Sándorné
adjunktus, Debrecen

Heron képlete I.
Udvari Tibor
középiskolai tanár, Baja

Két példa a készülő 9. osztályos matematika tankönyvből

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

Holló-Szabó Ferenc

Egy különleges számtáblázatról[1]

Elevenítsük fel az „Egy különleges sorozatról" című cikkben [4] vizsgált sorozat, a közéírásos sorozat definícióját! Mint ahogyan azt akkor csak röviden jegyeztük meg, a sorozat ún. szeleteit önmagukban is érdemes vizsgálni. Az alábbiakban egy olyan számtáblázattal ismertetjük meg a kedves olvasót, amelyiknek – egyik megadási módja szerint – a sorai éppen ezek a szeletek. Tanulmányozzuk a sorai által megadott táblázat oszlopait is, s az oszlopokhoz őket igen természetes módon jellemző számokat rendelve visszakapjuk a közéírásos sorozatot!

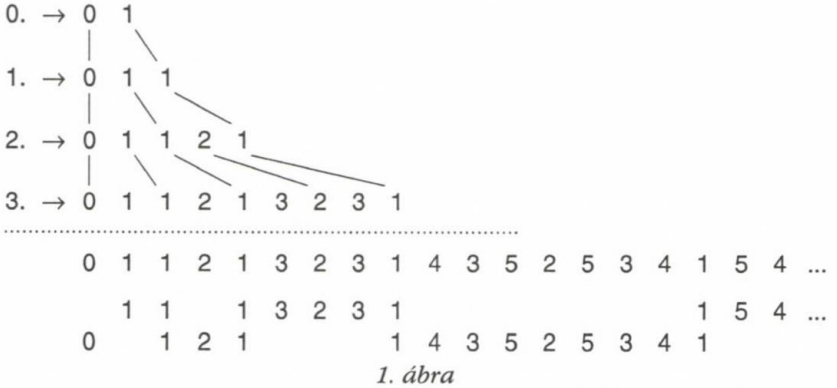
1. definíció: Közéírásos sorozat

Készítsünk véges számsorozatokat a 0, 1 két elemű sorozatból kiindúlva! Az $(n+1)$. sorozat szülessen az n.-ből úgy, hogy az előző lépés minden két szomszédos eleme közé beiktatjuk azok összegét. A szóban forgó végtelen sorozathoz az eljárás vég nélküli alkalmazásával jutunk.

Ekkor a kezdő 0-tól eltekintve a véges sorozatok hossza minden lépésben duplázódik, és könnyű látni, hogy az egyszer már definiált elemek értéke a rekurzió során nem változik. A fenti, közéírásos módszerrel kapott véges sorozatokat fő részsorozatoknak hívjuk (1. ábra).

Tekintsük a kezdő 0-t a sorozat 0. elemének! Az 1.definíció szerint minden lépésben – a közéírások miatt – a sorozat minden egyes eleme a kétszer annyiadik pozícióba kerül. Ezután a szóba jövő, páratlan indexű helyekre a már ismert szomszédok összegét írjuk. Az első néhány sor figyelembevételével azt már könnyű – a teljes indukció segítségével – bizonyítani, hogy a már egyszer definiált elemek értékét a további lépésekben sohasem kell megváltoztatni (ez azért érdekes, mert a közéírások miatt a sorozat már ismert elemeinek indexe minden lépésben duplázódik) (1. ábra). Nem kell tehát a végtelenbe való átmenetnél pl. határérték-számítás a sorozat megadásához. Ez a jelenség a látszólagos, vagy más néven „virtuális mozdulatlanság". A közéírásos sorozat tehát azon ritka sorozatok egyike, amelyeket a fent említett transzformáció (nyújtás, majd közéírás) helyben hagy.

A kiinduló elemekből származtatott egyesek segítségével bontsuk a sorozatot szeletekre az 1. ábrának megfelelően! Ekkor az n. szelet hossza $2^{n-1}+1$ lesz. (A záró egyesek tartozzanak a szeletekhez!) Ezzel a szóhasználattal élve a következő fő részsorozatot mindig úgy nyerjük az előzőből, hogy azt megtoldjuk a sorozat megfelelő szeletével.



1. ábra

A közéírásos sorozat megadása fő részsorozatokkal, és az egyesek által meghatározott ún. szeletek

[1] A Bakos Tibor emlékére indított cikksorozat második része.

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 5 2 5 3 4 1
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1
1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 ...
1 7 6 11 5 14 9 13 4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 19 8 21 13 18 5 19 ...

2. ábra
A közéírásos táblázat megadása a közéírásos sorozat szeleteivel

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 5 2 5 3 4 1
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

3. ábra
A szakaszfelezéses eljárással nyert számsorozatok

Az alábbiakban a közéírásos számtáblázat megadásának lehetőségeit tárgyaljuk három megközelítésben.

1. Megközelítés

Az „Egy különleges sorozatról" című cikkben (4) megismerkedtünk egy olyan sorozattal, amelynek az ún. fő részsorozatait „félbehajtva" bizonyos 0, 1 közötti, redukált alakú racionális számok rendezett sorozatait kapjuk. Készítsünk most a sorozatban szereplő egyesek által határolt szeletekből számtáblázatot! Rendezzük a táblázat soraiba a szeleteket úgy, hogy a kezdő egyesek egy oszlopba essenek! Az így nyert számelrendezést közéírásos számtáblázatnak hívjuk. (2. ábra)

2. Megközelítés

A problémafelvetés szempontjából is igen fontos a következő bevezetési mód:

Írjunk egy szakasz végpontjaiba egyeseket, majd minden lépésben felezzük meg az addig előálló szakaszokat, és azok felezőpontjaiba írjuk rendre az éppen elfelezett szakasz végpontjaihoz rendelt számok összegét (3. ábra)!

3. Megközelítés

Végül az elemi számtáblázatok tulajdonságaival foglalkozó cikksorozatunk előző részében [3] (1999/2. szám) vizsgált számtáblázat, az ún. aritmetikai háromszög generálásánál alkalmazott rekurzió módosításával is eljuthatunk a közéírásos számtáblázatokhoz.

Induljunk ki a Pascal-háromszög következő tulajdonságából:

Amikor az aritmetikai háromszög valamelyik sorában rendre a szomszédos elemek közé írjuk azok összegét, akkor éppen a táblázat következő sorához jutunk.

Módosított Pascal-háromszögünkben most is vegyük minden lépésben a szomszédos elemek összegét, de a táblázat következő sorában a teljes közéírással nyert sorozat jelenjen meg, s ne csak a közéírt számok. Most a sorokból csupán a kiinduló egyesek közé eső résszel dolgozunk. (Induljunk ki most is két darab egyesből.)

Most következzen a táblázat néhány elemi tulajdonságának rövid ismertetése! Könnyedén meghatározható a sorok elemszáma, azok elemeinek összege és az egyes sorokban előforduló legnagyobb szám. Érdemes az alábbiakban kapott eredményeket összehasonlítani a Pascal-háromszögnél kapottakkal. Kezdjük a sorok és oszlopok számozását most is nullával!

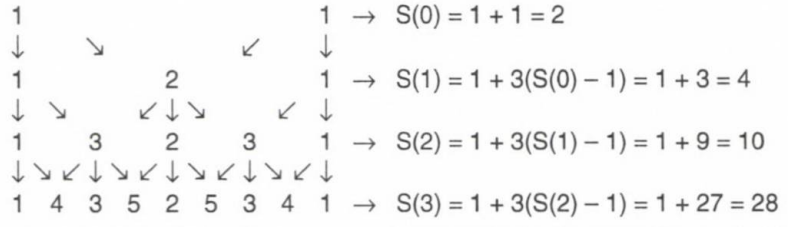
1. Ha a kezdő egyestől eltekintünk, a közéírások miatt a sorhossz minden lépésben kétszereződik, tehát az n. sorban $(2^n + 1)$ db elem található. (3. ábra)

2. A következő sor készítésénél a szélső egyeseket kétszer és minden más elemet háromszor használunk fel. Ez éppen azt jelenti, hogy ha a kezdő egyestől most is eltekintünk, akkor az $S(n)$-nel jelölt sorösszeg minden lépésben megháromszorozódik. Az n-edik sor összege tehát eggyel nagyobb, mint a három n-edik hatványa, vagyis $3^n + 1$ (5. ábra).

3. A legnagyobb elemek vizsgálatához készítsünk táblázatot (6. ábra). Legyen $M(i)$ az i. sor maximális eleme! Teljes indukcióval igazoljuk, hogy a maximális elemeket éppen a Fibonacci-sorozat adja meg.

4. ábra

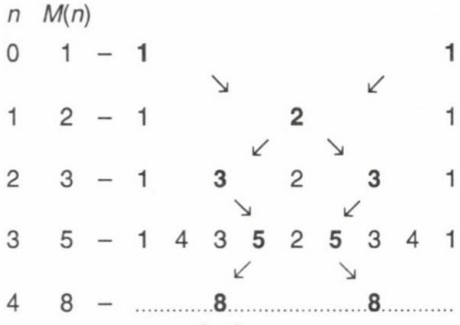
A Pascal-háromszög és a módosított Pascal-háromszög, az ún. közéírásos számtáblázat



5. ábra

A sorok S(n) összegének meghatározása

A táblázatból látható, hogy az első néhány lépésre az állítás igaz. Azt is könnyű ellenőrizni, hogy az egymást követő sorok maximális elemei minden esetben közvetlenül szomszédosak. Tetszőleges sort vizsgálva tehát azt tapasztaljuk, hogy az újonnan közéiktatott és már az előző sorban is megtalálható elemek váltakozva követik egymást. Ebből már következik, miként ékelődik a legutóbbi lépések legnagyobbjai közé az éppen születő sor maximális eleme. Úgy tűnik, a maximális elemek két, a kiinduló szakasz középpontjára szimmetrikusan elhelyezkedő kitüntetett pont körül oszcillálnak. Könnyen igazolható, hogy ezek a pontok éppen a kiinduló szakasz harmadoló pontjai (6. ábra).



6. ábra

A közéírásos rendszer egyes lépéseinek maximális elemei a szakasz harmadoló pontjai körül oszcillálnak

4. Sokat sejtet a táblázat fontosságáról az, ha megvizsgáljuk, hogy az egyes számok hányszor fordulnak elő a táblázat bizonyos soraiban.

Könnyen látható, hogy a szélső egyesekhez hasonlóan (a 2 kivételével) minden szám legalább kétszer előfordul a táblázat soraiban, hiszen a szélső egyes mellett rendre megkapjuk a természetes számokat. Az $(n-1)$-edik lépésben az 1-esek mellé éppen az n szám ékelődik. Indukcióval adódik, hogy az n. lépéstől kezdve minden közéiktatott szám már n-nél nagyobb. Továbbá a rendszer szimmetriájából az is következik, hogy a középső kettes kivételével minden természetes szám páros sokszor fordul elő. Jelölje $y(n)$ a közéírásos számtáblázat soraiban az n természetes szám előfordulásainak maximális számát. Miután a rendelkezésre álló adatokat táblázatba foglaltuk (7. ábra); megfogalmazhatunk néhány sejtést:

- A 2 kivételével minden szám páros sokszor szerepel.
- A 2 egyszer, a 3 kétszer ..., általánosan a p prímszám legfeljebb $(p-1)$-szer fordul elő az egyes sorokban, és a fentieket figyelembe véve a $(p-1)$-edik sortól kezdve meg is jelenik ennyiszer.
- Az n-edik kettő hatvány lehetséges előfordulásainak száma ismét egy kettő hatvány, mégpedig az $(n-1)$-edik.

Bizonyítás nélkül közöljük azt a meglepő tényt, hogy minden egynél nagyobb természetes szám legfeljebb annyiszor fordul elő a táblá-

zat egy sorában, mint ahány nálánál kisebb, hozzá relatív prím természetes szám van. Így egy neves számelméleti függvényt adtunk meg, mégpedig az Euler-féle $\varphi(n)$ függvényt. Mint ismeretes az $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ prímtényezős felbontásával adott természetes szám esetén a $\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$ formulával határozható meg [5].

Ellenőrizzük, hogy valóban a táblázat adatait kapjuk! Persze a bizonyítástól még messze vagyunk, de az már minden esetre ebből is látszik, hogy egyszerűsége ellenére a módosított Pascal-háromszög vizsgálata sem érhet véget az elemi matematikai szinten.

5. Ha a táblázat sorainak egymáshoz való helyzetét egy kiválasztott elem segítségével adjuk meg úgy, hogy ezt a 0. oszlopban rögzítve a sor többi elemét hozzá igazítjuk, akkor az oszlopokban egy egészen különös jelenséget tapasztalhatunk:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
$\gamma(n)$	2	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	8	18	8	12	10	22	...

7. ábra

Legfeljebb hányszor fordul elő egy szám a táblázat soraiban

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 5 2 5 3 4 1
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1
1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 ...
1 7 6 11 5 14 9 13 4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 19 8 21 13 18 5 17 ...
.....
0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 ...

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 5 2 5 3 4 1
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1
... 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 ...
.....
... 2 6 4 6 2 4 2 2 0 2 2 4 2 6 4 6 2 ...

1 1
1 2 1
1 3 2 3 1
1 4 3 5 2 5 3 4 1
1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1
1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 ...
4 15 11 18 7 17 10 13 3 14 11 19 8 21 13 18 5 17 12 19 7 16 9 11 2 11 ...
7 24 17 27 10 23 13 16 3 17 14 25 11 30 19 27 8 29 21 34 13 31 18 23 5 22 ...
.....
3 9 6 9 3 6 3 3 0 3 3 6 3 9 6 9 3 12 9 15 6 15 9 12 3 ...

8. ábra

Az oszlopokban számtani sorozatokat találunk függetlenül attól, hogy melyik számot rögzítjük. (Az oszlopok néhány kezdő elemétől olykor el kell tekintenünk!) Írjuk az egyes oszlopok alá a differenciájukat!

- Minden oszlopban számtani sorozatot találunk (esetleg néhány kezdő elemtől eltekintve).
- Ez a tulajdonság független attól, hogy melyik elemet rögzítettük a kitüntetett oszlopba.
- A bizonyításból az is kiderül majd, hogy ez a jelenség független a künduló elemek megválasztásától is.

Rögzítsük az első egyest a 0. oszlopban, ekkor az első oszlopban a természetes számok sorozatát találjuk, sőt a 2., 4., 8., 16. és minden vizsgált kettő hatványadik oszlopban ugyanez a sorozat látszik visszaköszönni. Ennek magyarázatát abban kereshetjük, hogy a közéírások miatt az első oszlopban minden számot a kezdő egyes és a szóban forgó szám összege követ, ami éppen a következő természetes szám. Ha nyomon követjük az első oszlop bármely elemét (9. ábra) – mondjuk az i-ediket – akkor azt tapasztaljuk, hogy a következő sorban (azaz az $(i+1)$-edikben) a közéiktatások miatt a 2., az azt követő sorokban pedig – ugyanilyen oknál fogva rendre a 4., 8., 16. ...oszlopokba kerül. Általánosan is elmondható, hogy a táblázat i. sorának j. eleme – melyet $(i; j)$-vel jelölünk a továbbiakban – a következő sorban a kétszer annyiadik helyre kerül, azaz a $(i+1; 2j)$ pozícióba. Ez azt jelenti, hogy a táblázat minden oszlopa elemről elemre átmásolódik a kétszer annyiadik oszlopba, és közben a másolatok egy sorral lejjebb kerülnek.

Fordítva, minden páros sorszámú oszlopnak van olyan „őse", amelyből ő másolódott. Tehát az első oszloptól kezdve, balról jobbra haladva minden második, azaz a páratlan sorszámú oszlopokban találunk olyan sorozatokat, melyek a fenti módon kisebb indexűekre nem vezethetőek vissza. Vajon a páratlanodik oszlopokban csupa különböző számsorozat található-e, és egyáltalán mifélék ezek a sorozatok?

Az (1, 1) számpárból generált közéírásos táblázat páratlan sorszámú oszlopaiban páronként különböző számtani sorozatok találhatók.

Pontosan azok a számtani sorozatok fordulnak elő, melyeknek differenciája relatív prím a sorozat elemeihez. A sorozat kezdőeleme pedig a szóban forgó redukált maradékosztályból a differenciánál nem kisebbek közül a legkisebb természetes szám.

Miután az elsőből rendre minden „kettő hatványadik" oszlopba bemásolódott a természetes számok sorozata, balról jobbra az első, még nem vizsgált oszlop a harmadik. A harmadik oszlop két, a korábbiakból jól ismert számtani sorozatot tartalmazó oszlop közé ékelődik be, melyek „összegeként" éppen őt kapjuk a közéírásos szerkezet miatt. Gondoljuk meg, hogy ha az első, még nem vizsgált oszlop a $(2k+1)$., akkor az ő szomszédái a $2k$. és a $2(k+1)$. oszlopok, s ezek rendre megegyeznek a k. és a $(k+1)$. oszlopokkal (egy pozícióval lejjebb csúsztatva). Ez utóbbi oszlopok egy sorban levő elemeí közé a következő sorban beékelődik ezek összege. A sorokat rendre vizsgálva az összeadandók együttes növekménye lépésről lépésre minden esetben $d(k) + d(k+1)$, ahol $d(i)$ az i. oszlop differenciája. A módszer ismételt alkalmazásával láthatjuk be, hogy a páratlan indexű oszlopokban is számtani sorozat található, amelyek differenciája a szomszédos oszlopok differenciáinak összege.

Elmondhatjuk a fentiek alapján, hogy ha a „balra igazított" közéírásos táblázat oszlopai alá rendre a bennük található számtani sorozat differenciáját írjuk, akkor éppen a közéírásos sorozatot kapjuk! Továbbá a táblázat soraiban éppen a sorozat szeleteit találjuk.

Készítettünk egy számtáblázatot, melyről kiderült, hogy oszlopai számtani sorozatok, és az ezek differenciáiból készített sorozat az őt létrehozó számtáblázat sorainak egybeláncolása!

Azt sem nehéz meggondolni, hogy amikor a táblázat sorainak egymáshoz viszonyított helyzetét a táblázat e tetszőleges elemének az első megjelenését követő sortól kezdődően egy oszlopba való igazításával adjuk meg, akkor a differenciasorozat éppen a rögzített számmal szorzódik (8. ábra).

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	...
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	n	.	.	.	.	.	.	.	.
1	$n+1$	n	.	.	.	.	.	.	.
1	$n+2$	$n+1$	.	n	.	.	.	.	.
1	$n+3$	$n+2$	.	$n+1$	.	.	.	n	.
.	.	$n+3$	.	$n+2$	.	.	.	$n+1$	.
.	.	.	.	$n+3$	.	.	.	$n+2$	.
.	.	.	.	.	.	.	.	$n+3$	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

9. ábra

Az első oszlop elemeinek „nyomon követése"

$k.$	$(k+1).$	...	$(2k).$	$(2k+1).$	$(2k+2).$	
a	b	...	.	.	.	
$a+d(i)$	$b+d(i+1)$	...	a	$a+b$	b	...
$a+2d(i)$	$b+2d(i+1)$	...	$a+d(i)$	$(a+b)+[d(i)+d(i+1)]$	$b+d(i+1)$	...
$a+3d(i)$	$b+3d(i+1)$	...	$a+2d(i)$	$(a+b)+2[d(i)+d(i+1)]$	$b+2d(i+1)$	...
.	.	...	$a+3d(i)$	$(a+b)+3[d(i)+d(i+1)]$	$b+3d(i+1)$	...
.	.		.	.	.	

10. ábra

Balról jobbra az első még nem vizsgált oszlop keletkezése

n	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	...	
	0	1	1		1				1								1		1. lépés $a(2^n)=1$
				2			2						2						2. lépés $a(3\cdot 2^n)=2$
						3					3								3. lépés $a(5\cdot 2^n)=3$
								3							3				4. lépés $a(7\cdot 2^n)=3$
										4									5. lépés $a(9\cdot 2^n)=4$
												5							6. lépés $a(11\cdot 2^n)=5$
														5					7. lépés $a(13\cdot 2^n)=5$
																4			8. lépés $a(15\cdot 2^n)=4$

a_n	0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1	5	4	7	3	8	5	...
		1	1		1	3	2	3	1								1	5	4	7	3	8	5	...
	0		1	2	1				1	4	3	5	2	5	3	4	1							

11. ábra

A közéírásos-sorozat definíciója és a sorozat szeletekre bontása

1	1																							
1	2	1																						
1	3	2	3	1																				
1	4	3	5	2	5	3	4	1																
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1								
1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	8	11	3	10	...
1	7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	10	13	3	14	11	19	8	21	13	18	5	17	...

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	...
	1	1		1	3	2	3	1								1	5	4	7	3	8	5	...			
0		1	2	1				1	4	3	5	2	5	3	4	1										

12. ábra

A közéírásos táblázat, melynek oszlopaiban számtani sorozatokat találunk

Irodalom

[1] Matematikatanár-képzés, Holló-Szabó Ferenc: Köztes-táblázatok Calibra Kiadó, Bp.1994

[2] I. Niven – H.S. Zuckerman: Bevezetés a számelméletbe, MK. 1978 / 119.0

[3] Holló-Szabó Ferenc: Az aritmetikai vagy Pascal-háromszög néhány elemi tulajdonsága (A matematika tanítása, VII. évfolyam 1999, 1-214.o.)

[4] Holló-Szabó Ferenc: Egy különleges sorozatról (A matematika tanítása, VII. évfolyam 1999. 4. o.)

[5] Sárközy András: Számelmélet, MK. 1976. 87.o.

Dr. Kántor Sándorné

Beszámoló a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyről

A 2000 /2001. tanévben 2000. november 16-án került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai és Informatikai Intézete és a BJMT H-B megyei Tagozata szervezésében. A verseny koordinátora dr. Lajkó Károly, a versenybizottság vezetője dr. Kántor Sándorné volt.

A versenyen a megye középiskolásai vettek részt. Több, mint 1000 tanuló írt versenydolgozatot.

Az egyes évfolyamok versenyfeladatait a DE Matematikai és Informatikai Intézetének oktatói állították össze (9. osztály: dr. Kovács András, 10. osztály: dr. Kántor Sándor, 11. osztály: dr. Páles Zsolt, 12. osztály: dr. Kántor Sándorné). Mindegyik évfolyamon 5 feladatot kaptak a tanulók, a kidolgozási idő 2,5 óra volt. Egy-egy feladatsor pontértéke: 60 pont.

A versenybizottság igen eredményesnek ítélte a versenyt, 35 tanár 61 diákja ért el helyezést vagy kapott dicséretet. Maximális pontszámot 6 tanuló ért el: Egri Attila, Tóth Ágnes, Erdei Zsuzsa, Siroki László, Nagy Dávid, Deli Lajos.

A verseny eredményei:

(A rövidítések jelentése: FMG : Fazekas Mihály Gimnázium, TÁG: Tóth Árpád Gimnázium)

9. osztály

Gimnázum

1. Egri Attila (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló)
2. Császi Attila (Bocskai I. Gimn. Hajdúböszörmény)
   Papp Gábor (FMG, Debrecen)
   Dányádi Zsolt (FMG, Debrecen)
3. Biri Bernadett (FMG, Debrecen)
   Fábián Máté (FMG , Debrecen)
   Sum Zsuzsanna (Kossuth L. Gimn., Debrecen)
   Sziklási Béla (FMG, Debrecen)
   Szabó Áron (TÁG, Debrecen)

Dicséret: Banyár Attila (FMG, Debrecen), Szőke Edina (FMG, Debrecen), Zajdó Szabolcs (TÁG, Debrecen)

Szakközépiskola

3. Deák György (Mechwart SzkI, Debrecen)
   Jónis Péter (Mechwart SzkI, Debrecen)

Dicséret: Pál Lajos (Gábor Dénes Szkl, Debrecen)

10. osztály

Gimnázium

2. Csóka Endre (FMG, Debrecen)
   Kormos Attlia (FMG, Debrecen)

Dicséret: Nagy András (FMG, Debrecen), Nagy Tibor (FMG, Debrecen), Uzonyi Béla (Bocskai I. Gimn. Hajdúböszörmény), Hofgárt Gergely (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló), Krusper Balázs (TÁG, Debrecen), Minárik Péter és Minárik Zoltán (Karacs F. Gimn. Püspökladány), Szőllősi Ádám (FMG,Debrecen), Nádasi Levente (Ref. Koll. Gimn., Debrecen), Sántha Katalin (Bocskai I. Gimn. Hajdúböszörmény).

Szakközépiskola

Dicséret: Nagy Erika (Bethlen G. Szki., Debrecen)

11. osztály

Gimnázium

1. Tóth Ágnes (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló)
   Erdei Zsuzsa (Hőgyes E. Gimn. Hajdúszoboszló)
   Siroki László (FMG, Debrecen)

2. Tímár Gábor (FMG, Debrececn)
   Guta Balázs (Ady E. Gimn. Debrecen)
3. Dombi Tímea (TÁG, Debrecen)
   Szakácsi János (FMG, Debrecen)
   Pajna Gabriella (TÁG, Debrecen)

Dicséret: Varga Péter (FMG, Debrecen), Sípos Alaexandra (FMG, Debrecen), Vadai Zsolt (FMG, Debrecen), Nagy László (Bocskai I. Gimn. Hajdúböszörmény), Csillag Marianna (Karacs F. Gimn., Püspökladány), Nagy Zoltán (TÁG, Debrecen), Kovács Dénes (TÁG, Debrecen), Kocsis Gergely (TÁG, Debrecen), Kovács Zoltán (TÁG, Debrecen), Makó Judit (Vásárhelyi P. Gimn., Polgár)

Szakkiözépiskola

2. Varga Balázs (Bethlen G. Szki. Debrecen)
3. Szaszkó Viktor (Bethlen G. Szki., Debrecen)

Dicséret: Katona Balázs (Mechwart A. Szki., Debrecen), Horváth Péter (Gábor D. Szki., Debrecen)

12. osztály

Gimnázumm

1. Nagy Dávid (FMG, Debrecen)
   Deli Lajos (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló)
2. Csató György (Hőgyes E. Gimn., Hajdúszoboszló)
3. Fehér Gergely (FMG, Debrecen)

Dicséret: Szabó Lídia (Ref. Koll. Gimn., Debrecen), Pósa Ádám (Kossuth L. Gimn., Debrecen), Illés Péter (TÁG, Debrecen), Hank Sándor (FMG, Debrecen), Vona Gábor (FMG, Debrecen), Simon Tamás (Ref. Koll. Gimn., Debrecen)

Szakközépiskola

3. Engi Zsolt (Bethlen G. Szki., Debrecen)

A versenyen kitűzött feladatok

9. osztály

1. Hány különböző ötjegyű számot alkothatunk két 1-es, egy 2-es, egy 3-as és egy 4-es számjegyből?

8 pont

2. 3 pénzérme közé negyedikként egy látszólag velük azonos, de tőlük különböző súlyú hamisat tettek. Legkevesebb hány méréssel állapítható meg egy kétkarú mérleg segítségével, hogy melyik érme a hamis?

10 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 10-es számrendszerbeli szám 7-tel osztható, akkor az utolsó számjegyének elhagyásával keletkezett számot e jegy kétszeresével kisebbítve szintén 7-tel osztható számot kapunk. Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása is?

12 pont

4. Oldjuk meg az

$$x^2 - 4 = x^2y^4$$

egyenletet a természetes számpárok halmazán.

14 pont

5. Melyek a sík azon pontjai, amelyeknek a sík *e* és *f*, egymással nem párhuzamos egyeneseitől mért távolságainak összege egy adott *d* távolsággal egyenlő?

16 pont

10. osztály

1. Hány $(x; y)$ számpár elégíti ki az $x^6 + 2y^6 < 2000$ egyenlőtlenséget, ha x is és y is egész számok?

8 pont

2. Egy kocka középpontjának távolsága az egyik csúcsától *a*, az egyik élének felezőpontjától *b*, az egyik lapjának középpontjától *c*. Van-e olyan háromszög, amelyik oldalainak hossza *a*, *b*, *c*?

10 pont

3. Az ABC háromszög BC' oldalának A_1 belső pontján áthaladó, AC-vel párhuzamos egyenes AB-t C_1-ben metszi. Az A_1 ponton áthaladó, AB-vel párhuzamos egyenes AC-t B_1-ben metszi. Legyen az ABC, CB_1A_1, BA_1C_1 háromszögek köré írt kör sugara rendre r, r_c, r_b. Igazolja, hogy $r = r_c + r_b$!

12 pont

4. Igazolja, hogy $x^{2n+3} + (x-1)^{n+3}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ osztható $x^2 - x + 1$-gyel!

14 pont

5. Legyenek x és y pozitív számok. Legfeljebb mekkora lehet az x, $y + \frac{1}{x}$, és $\frac{1}{y}$ számok legkisebbike?

16 pont

11. osztály

1. Oldjuk meg az

$$\left|x^2 - 3|x| + 1\right| = 1$$

egyenletet!

8 pont

2. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{y} + z^2 = 3 \\ 2\sin x + \sqrt{y} - z^2 = 0 \\ 3\sin x + 2\sqrt{y} + 3z^2 = 19 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

10 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x, y, z > 0$ számra

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \le \frac{x+y+z}{2}.$$

Mikor állhat fenn az egyenlőtlenség?

12 pont

4. Egy egységnyi élű kockát a középpontján átmenő és a testátlójára merőleges síkkal elmetszünk. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett síkmetszet szabályos hatszög, és számítsuk ki a hatszög területét!

14 pont

5. Az x_n sorozat tagjai teljesítik az

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 1$$

rekurziót. Határozzuk meg x_{2000} értékét, ha $x_0 = 1$ és $x_1 = 2$!

16 pont

12. osztály

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$(2x^2 - 11x - 13)\log_{0,5}(7 - x) > 0.$$

9 pont

2. Határozza meg a p pozitív valós szám értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \frac{x^2 + p^2}{x}, \qquad x > 0$$

függvény az $x = 2\sqrt{3}$ helyen vegye fel a legkisebb értékét! Mekkora ez a legkisebb érték?

10 pont

3. Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

12 pont

4. Legyen az ABC háromszög belső szögfelezőinek a metszéspontja O, az α szög belső szögfelezőjének a BC oldallal való metszéspontja M, a β szög belső szögfelezőjének AC oldallal való metszéspontja N,

$$d_{AO} = \sqrt{3}d_{MO}. \qquad d_{NO} = \left(\sqrt{3} - 1\right)d_{BO}.$$

Mekkorák az ABC háromszög szögei?

14 pont

5. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sin 2x - 2\left(2\sqrt{\sin x + \cos x} - 3\right)(\sin x + \cos x) = 4\sqrt{\sin x + \cos x} - 2.$$

15 pont

Néhány feladat megoldásának bemutatása

9. osztály

3. Jelöljük az eredeti számot $10A + b$-vel, ahol $0 \le b \le 9$.

Az utolsó jegy elhagyásával keletkezett számot e jegy kétszeresével kisebbítve az $A - 2b$ számhoz jutunk.

A $10A + b\ (= 7A + 7b + 3A - 6b) = 7(A + b) + 3(A - 2b)$ egyenlőségből $3(A - 2b) = 10A + b - 7(A + b)$ következik, amiből a feltétel miatt $7 \mid 3(A - 2b)$, majd innen $(3; 7) = 1$ miatt $7 \mid (A - 2b)$ adódik.

A $10A + b = 7(A + b) + 3(A - 2b)$ egyenlőségből $7 \mid 7(A + b)$ és $7 \mid (A - 2b)$ miatt $7 \mid (10A + b)$ következik.

Emiatt az állítás megfordítása is igaz.

4. Írjuk az egyenletet az $x^2(1 - y^4) = 4$ alakba! Mivel x^2 négyzetszám, ez csak az $x^2 = 1$, $1 - y^4 = 1$ esetekben teljesülhet. Az első egyenletrendszert egyetlen természetes számpár sem elégíti ki, a másodikból $x = 2$, $y = 0$ adódik. A kapott értékek kielégítik az eredeti egyenletet.

12. osztály

3. $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k(k+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \quad (k \in \mathbb{N}^+).$$

Ezért $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots +$

$$+ \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Megjegyzés: a feladat a teljes indukció módszerével is megoldható.

4. Írjuk fel a szögfelezőtételt az ABM, ABN és az ABC háromszögekre!

$$\frac{d_{BM}}{d_{AB}} = \frac{d_{MO}}{d_{AO}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{d_{AN}}{d_{AB}} = \frac{d_{NO}}{d_{BO}} = \sqrt{3} - 1,$$

$$\frac{d_{AN}}{d_{CN}} = \frac{d_{AB}}{d_{BC}}, \quad \frac{d_{BM}}{d_{CM}} = \frac{d_{AB}}{d_{AC}}.$$

Legyen $d_{AB} = x$, $d_{BC} = y$, $d_{AC} = z$.

Ekkor $d_{AN} = x\left(\sqrt{3} - 1\right)$, $d_{BM} = \frac{x}{\sqrt{3}}$,

$\frac{x\left(\sqrt{3} - 1\right)}{z - x\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{x}{y}$, $\frac{x}{y\sqrt{3} - x} = \frac{x}{z}$. Az egyenletrendszer megoldása: $y = \sqrt{3} \cdot x$, $z = 2x$. Így $x^2 + y^2 = z^2$. Pitagorász tételének megfordítása miatt az $ABC_\triangle$ derékszögű, és szögei: $ABC\sphericalangle = 90°$, $BAC\sphericalangle = 60°$, $AC\sphericalangle = 30°$.

5. Felhasználjuk, hogy $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$. A $\sqrt{\sin x + \cos x} = u$ $(u \neq 0)$ helyettesítés bevezetésével az $u^2 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1 = 0$ szimmetrikus egyenletet kapjuk, amit u^2-tel osztva: $u^2 + \frac{1}{u^2} - 4\left(u + \frac{1}{u}\right) + 6 = 0$. Legyen $u + \frac{1}{u} = z$, ekkor $u^2 + \frac{1}{u^2} = z^2 - 2$, vagyis $z^2 - 4z + 4 = 0$, $z = 2$. $u + \frac{1}{u} = 2$, amiből $u = 1$.

Visszahelyettesítve: $\sin x + \cos x = 1$;

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \quad (k_1 \in \mathbb{Z})$,

$x_2 = 2k_2\pi \quad (k_2 \in \mathbb{Z})$.

Mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

Udvari Tibor

Héron képlete I.

A középiskolai oktatásban időnként megemlítjük Héron képletét, szerepel a képlet a függvénytáblázatban is. Bizonyításával azonban ritkán foglalkozunk, pedig sok tanult anyaghoz kapcsolható. Egyaránt kínál alkalmazási lehetőséget a hasonlóság, a trigonometria, a vektorok, a nevezetes szorzatok, a derékszögű háromszögek tételei számára.

A következőkben sorra veszem a tétel néhány bizonyítását. Mindegyiknél utalok azokra az ismeretekre, amelyek az iskolai oktatás valamelyik témájához köthetik.

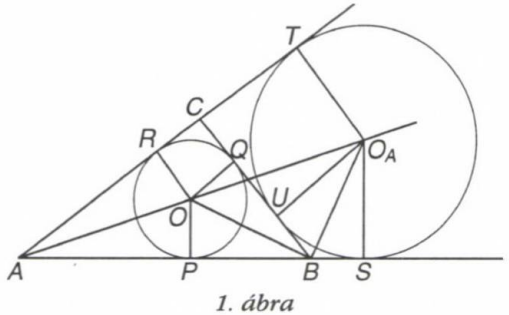
Héron képletét lehet általánosítani négyszögekre, tetraéderekre, meg lehet fogalmazni determinánsos alakban, és formailag hasonló képleteket lehet megfogalmazni területekre és térfogatokra. Ezek egy másik cikk anyagát képezik, terjedelmük miatt a mostaniba nem férnek bele.

A tétel bizonyításai

1. bizonyítás

Talán ez a legismertebb bizonyítás. Alapvetően a háromszögek hasonlóságának tanításánál érdemes bemutatni. Rövidebbé tehetjük, ha a benne felhasznált területképleteket, valamint a beírt és hozzáírt körökhöz a csúcsokból húzható érintőszakaszok hosszára vonatkozó képleteket már előtte, külön bizonyítjuk.

Rajzoljuk meg az ABC háromszög beírt körét és az a oldalhoz hozzáírt körét! A beírt kör középpontját jelölje O, sugarát r, a hozzáírt háromszög középpontját O_A, sugarát r_a. Állítsunk merőlegest az ABC hármszög oldalegyeneseire O-ból és O_A-ból egyaránt! O-nak a merőleges vetületei legyenek rendre P, Q és R, O_A pont merőleges vetületeit pedig jelölje rendre S, T és U.



1. ábra

Kössük össze a B pontot az O és az O_A középpontokkal! Mint ismeretes, a BO és BO_A az ABC háromszög B-nél levő belső és külső szögének szögfelezőjén fekszik. Ebből adódik, hogy BO és BO_A merőlegesek egymásra, tehát $OBP\sphericalangle = BO_AS\sphericalangle$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek. Figyelembe véve azt is, hogy egy-egy szögük derékszög, megállapíthajuk, hogy az OBP és BO_AS háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik páronként megegyeznek. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya azonban megegyezik, ezért felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$(1) \qquad \frac{OP}{PB} = \frac{BS}{SO_A}.$$

Ismert, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért a beírt kör esetén $AP = AR$, $BP = BQ$, $CQ = CR$. Írjuk fel a háromszög kerületét kétféleképpen:

$$AP + PB + BQ + QC + CR + RA = 2 \cdot s,$$
$$PB + CR + RA = s,$$
$$(2) \qquad PB = s - (CR + RA) = s - b.$$

Most a hozzáírt háromszög esetére is írjuk fel a hozzá húzható érintőszakaszok egyenlőségeit: $CT = CU$ és $BS = BU$, valamint $AS = AT$.

$$AS + AT = AB + BS + AC + CT =$$
$$= AB + BU + AC + CU = 2 \cdot s,$$

ezért

$$AS = s,$$

és (mivel $AS = AB + BS = c + BS$)

$$(3) \qquad BS = s - c.$$

Helyettesítsük be az (1)-be a (2) és (3) kifejezéseket, majd használjuk fel, hogy

(4) $$t = t_{ABO} + t_{BOC} + t_{COA} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = sr,$$

illetve

(5) $$t = t_{ABO_A} + t_{ACO_A} - t_{BCO_A} = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{(b+c-a)r_a}{2} = (s-a)r_a.$$

Ekkor adódik, hogy

$$\frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a},$$

$$\frac{t}{s\cdot(s-b)} = \frac{(s-c)\cdot(s-a)}{t},$$

$$t^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$$

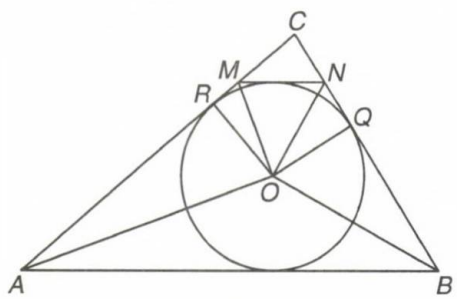
Innen pedig már könnyen megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$t = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

2. bizonyítás

A hasonlóság mellett most a magasságtétel alkalmazása játszik fontosabb szerepet, valamint az előző bizonyításban is említett alapozó ismeretek. Érdemes a bemutatása előtt az MNC háromszög kerületének kiszámítását önálló feladatként megoldatni.

Húzzuk meg az *ABC* háromszögben az *AB* oldallal párhuzamos, a beírt kört érintő *MN* szakaszt! *(2. ábra)* Ekkor az *AO* szakasz szögfelezője a *CAB*∢-nek, *MO* pedig az *AMN*∢-nek, hiszen külső pontból húzott érintők szögét felezi a pontot és a kör középpontját összekötő szakasz. Ugyanakkor a *CAB*∢ és az *AMN*∢ összege 180°. Ebből adódik, hogy az *MAO*∢ és *AMO*∢ összege 90°, tehát *AOM*∢ derékszög. Ugyanígy látható be az is, hogy a *BON*∢ derékszög.



2. ábra

Alkalmazzuk a két derékszögű háromszögre a magasságtételt:

$$RM \cdot RA = r^2 \text{ és } QN \cdot QB = r^2.$$

Az 1. bizonyításban látott módon igazolható, hogy $RA = s - a$ és $QB = s - b$. Helyettesítsük be ezeket az előző összefüggésekbe:

$$RM = \frac{r^2}{s-a} \text{ és } QN = \frac{r^2}{s-b}.$$

Használjuk ki most is, hogy a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza megegyezik:

$$MN = RM + QB =$$

$$= \frac{r^2}{s-a} + \frac{r^2}{s-b} = r^2\frac{s-a+s-b}{(s-a)(s-b)} =$$

$$= r^2\frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)} = r^2\frac{c}{(s-a)(s-b)}$$

Az *ABC* háromszög hasonló az *MNC* háromszöghöz, ezért megfelelő oldalaik és kerületeik aránya is megegyezik. Az *ABC* háromszög kerülete $2s$, az *MNC* háromszög kerülete:

$$MN + MC + CN = CR + CQ =$$
$$= 2s - 2c = 2(s-c)$$

Ezek alapján:

$$\frac{2s}{2(s-c)} = \frac{AB}{MN} = \frac{c}{r^2\dfrac{c}{(s-a)(s-b)}}$$

Egyszerűsítés és rendezés után:

$$s\cdot r^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$$

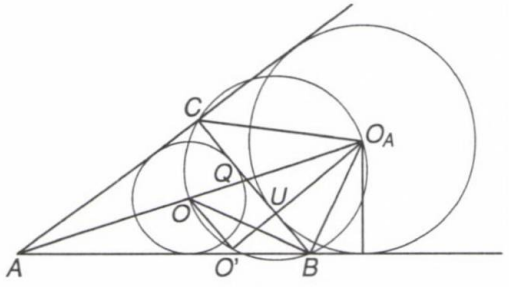
Ha most mindkét oldalt s-sel megszorozzuk, $s^2r^2 = t^2$ miatt adódik:

$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3. bizonyítás

Ebben a bizonyításban Thalesz tételéhez, valamint pont körre vonatkozó hatványához lehet kapcsolni képletünket.

Húzzuk meg az *ABC* háromszög hozzáírt körének O_A középpontját az *U*-val összekötő félegyenest, és állítsunk merőlegest erre a félegyenesre az *O* pontból! A metszéspont legyen *O'*. Mivel egyaránt derékszöget alkot az $OO'O_A$∢, OBO_A∢ és OCO_A∢, ezért az OO_A szakasz, mint átmérő fölé rajzolt körön található az *O'*, *B* és



3. ábra

C pont is. (Előfordulhat, hogy O és O' egybeesik.) Az OQ és $O'U$ szakaszok r hosszúságúak.

Mivel az $O'OA$ és a BC szakaszok ugyannak a körnek a húrjai, U metszéspontjukra érvényes a következő összefüggés:

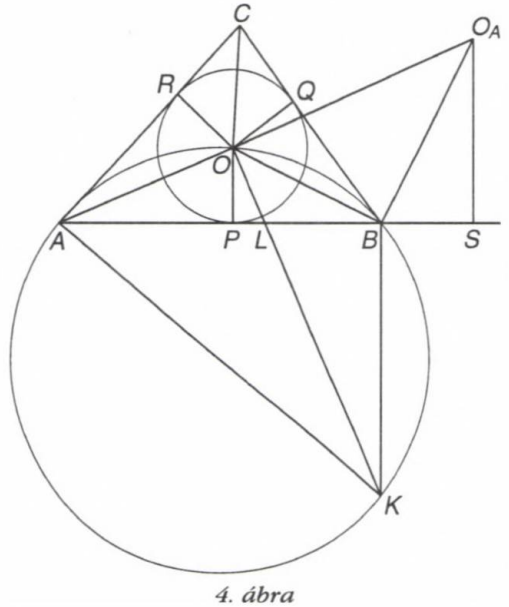
$$O'U \cdot UO_A = BU \cdot UC$$
$$r \cdot r_a = (s-b)(s-c)$$

Szorozzuk meg a kapott egyenlőség mindkét oldalát $s \cdot (s-a)$-val, és használjuk fel a (4) és (5) összefüggéseket:

$$r \cdot s \cdot r_a \cdot (s-a) = s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4. bizonyítás

Megint elemi geometriai ismereteket használunk. A bizonyítás történeti érdekessége, hogy lényegében Héron bizonyításának nyomán halad.



4. ábra

Állítsunk merőlegest az O pontban az AO szakaszra és a B pontban az AB szakaszra! Ennek a két merőlegesnek a metszéspontját jelölje K. Mivel az AK szakasz derékszögben látszik az O és B pontból egyaránt, ezért az AK szakasz mint átmérő fölé rajzolt körön van O és B is. Az $AOBK$ négyszög ezek szerint húrnégyszög, vagyis

$$AOB\sphericalangle + AKB\sphericalangle = 180°.$$

Ugyanakkor nyilvánvalóan $AOB\sphericalangle = AOP\sphericalangle + POB\sphericalangle$. Adjuk hozzá mindkét oldalhoz a $COQ\sphericalangle$-et. Mivel $AOR\sphericalangle = AOP\sphericalangle$, $POB\sphericalangle = BOQ\sphericalangle$ és $COQ\sphericalangle = COR\sphericalangle$, és ennek a hat szögnek összege 360°, kapjuk, hogy

$$AOB\sphericalangle + COQ\sphericalangle = 180°.$$

Ezek szerint $AKB\sphericalangle = COQ\sphericalangle$, és mivel az AKB és COQ háromszögek mindketten derékszögűek is, a szögek egyenlőségéből e két háromszög hasonlósága következik, ami miatt

$$\frac{AB}{BK} = \frac{CQ}{QO}$$

Ismert, hogy $BS = CQ$ és $OQ = OP$, tehát (átrendezés után)

$$\frac{AB}{BS} = \frac{BK}{OP}$$

A szögek egyenlősége miatt azonban az OPL és KBL háromszögek is hasonlóak, ezért a BK és OP oldalak aránya helyettesíthető a BL és LP oldalak arányával:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{BL}{LP}$$

Adjunk egyet az egyenlőség mindkét oldalához, ekkor $AB + BS = AS$ és $BL + LP = BP$ miatt

$$\frac{AS}{BS} = \frac{BP}{LP}$$

Most a bal oldali törtet AS-sel, a jobb oldalit pedig AP-vel bővítsük:

$$\frac{AS^2}{AS \cdot BS} = \frac{AP \cdot BP}{AP \cdot LP}$$

Mivel APO háromszög derékszögű, a magasságtétel alapján $AP \cdot LP = OP^2 = r^2$. Használjuk fel, hogy $AS = s$, $BS = s-a$, $AP = s-c$ és $BP = s-b$, így rendezés után

$$s^2 r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

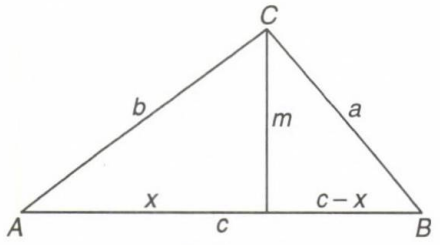
vagyis

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

5. bizonyítás

Ennek a levezetésnek az eleje kapcsolható például a koszinusztétel egyik bizonyításához, hiszen hasonló az indulásuk. Bár eléggé számolásigényes, de a tanult nevezetes szorzatok többszöri alkalmazása tanulságossá teszi.

Legyen c az ABC háromszög leghosszabb oldala (ha több is van, közülük az egyik). A c oldalhoz tartozó m magasság két derékszögű háromszögre bontja az ABC háromszöget és az x, $c-x$ szakaszokra a c oldalt.



5. ábra

Írjuk fel Pitagorasz tételét a két derékszögű háromszögre!

$$m^2 + x^2 = b^2$$
$$m^2 + (c-x)^2 = a^2$$

A két egyenletből m-et kiküszöbölve fejezzük ki x-et, majd a kapott eredményt helyettesítsük vissza az első egyenletbe, és fejezzük ki belőle m -et:

$$x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

$$m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}$$

A négyzetgyökjel alatti kifejezést szorzattá alakíthatjuk, majd mindkét tényezőben hozzunk közös nevezőre. A számlálókban teljes négyzetté alakítás után újra szorzattá bonthatunk:

$$m^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 =$$

$$= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{2c}$$

$$m^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{4c^2}$$

A négyzetgyökjel alatti kifejezés számlálójának tényezői egyszerűen kifejezhetők az s segítségével:

$$m^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

$$t = \frac{cm}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

6. bizonyítás

Itt már trigonometriai ismereteket is használnunk kell, utána azonban a előző bizonyítással szinte teljesen megegyező módon dolgozhatunk.

Az ABC háromszögben írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt, majd fejezzük ki belőle az α szög koszinuszát:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Mivel $0° < \alpha < 180°$, egyszerűen előállíthatjuk segítségével az α szög szinuszát:

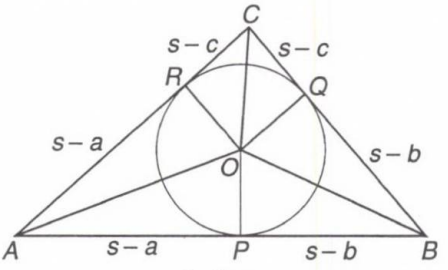
$$\sin\alpha = \frac{(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)^{\frac{1}{2}}}{2bc}$$

Innen kezdve az előző bizonyításban látott átalakításokat végezzük, adódik:

$$t = \frac{cm}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

7. bizonyítás

Egy ritkán használt trigonometriai azonosság ismeretét feltételezi ez a levezetés. Ha ezt a feladatot kitűzzük, utána érdemes megmutatni alkalmazásaként ezt a bizonyítást.



6. ábra

Induljunk ki egy olyan összefüggésből, amely bármely háromszög szögeire igaz!

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Az ábráról leolvasható, hogyan fejezhetjük ki az összefüggésben szereplő szögfüggvényeket az *AOP*, *BOP* és *COQ* derékszögű háromszögek oldalainak segítségével, majd ezeket helyettesítsük be az előző összefüggésbe:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{s-a}{r},\quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{s-b}{r}$$

és

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s-c}{r}$$

$$\frac{s-a}{r}+\frac{s-b}{r}+\frac{s-c}{r}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^3}$$

Rendezés után:

$$s\cdot r^2=(s-a)(s-b)(s-c),$$

ami a 2. bizonyításban látott módon átalakítható:

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

8. bizonyítás

Most vektorok vektoriális szorzatára vonatkozó ismereteket használunk fel a bizonyításban. Eléggé számolásigényes ez a változat is.

Legyenek az *ABC* háromszög *C* csúcsából az *A* és *B* csúcsba mutató vektorok koordinátái $\overrightarrow{CA}(b_1; b_2; 0)$ és $\overrightarrow{CB}(a_1; a_2; 0)$. Ekkor $\overrightarrow{BA}(a_1-b_1; a_2-b_2; 0)$. Az *ABC* háromszög területét ki lehet fejezni az oldalait kifeszítő vektorok vektoriális szorzatának segítségével.

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$t=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2}$$

Mivel a vektorok a háromszög oldalaival egyeznek meg, érvényesek a következő összefüggések:

$$a^2=a_1^2+a_2^2$$
$$b^2=b_1^2+b_2^2$$
$$c^2=a_1^2+b_1^2-2a_1b_1+a_2^2+b_2^2-2a_2b_2$$

Az első két egyenlőség megfelelő oldalait szorozzuk össze, a harmadik jobb oldalán pedig helyettesítsük be az első két egyenlőséget, majd rendezzük:

$$a^2b^2=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2$$
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=a_1b_1+a_2b_2$$

Ezek segítségével előállítható a terület képletében a négyzetgyök alatt kapott kifejezés:

$$a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1a_2b_1b_2=a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{(2ab)^2}{4}-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}=$$

$$=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4}=$$

$$=\frac{\left[(a+b)^2-c^2\right]\cdot\left[c^2-(a-b)^2\right]}{4}=$$

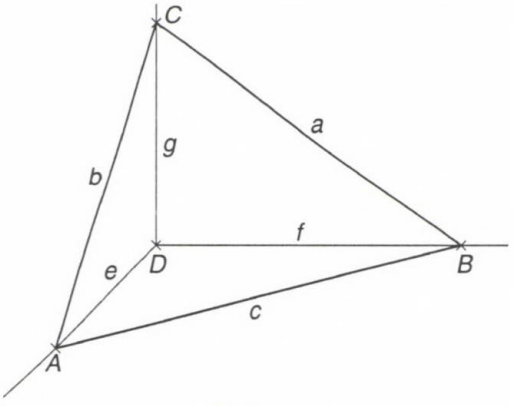
$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4}$$

Visszahelyettesítés után megkapjuk az ismert képletet:

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

9. bizonyítás

Némileg csonka bizonyítás: csak hegyesszögű háromszögekre mutatjuk meg a képlet érvényességét. Előnye azonban, hogy arra mutat példát, hogyan lehet egy síkbeli feladatot a térbe kilépve megoldani. Szükség van a Pitagorasz-tétel egyik térbeli általánosításának előzetes bizonyítására is.



7. ábra

Csak hegyesszögű háromszögekre lesz érvényes a levezetés, bár a komplex számok felhasználásával kiterjeszthető tetszőleges háromszögekre is.

Ha *ABC* egy hegyesszögű háromszög, akkor előáll egy *ABCD* derékszögletű tetraéder negyedik lapjaként. Más szavakkal, el lehet helyezni egy térbeli derékszögű koordinátarendszer tengelyeinek pozitív felein a csúcsait. Derékszögletű tetraéderre érvényes Pitagorasz tételének egy általánosítása: ha t_{ABC}, t_{ABD}, t_{BCD}, t_{CAD} jelöli a tetraéder lapjainak területeit, akkor:

$$t_{ABC}^2 = t_{ABD}^2 + t_{BCD}^2 + t_{CAD}^2$$

Az *ABC* háromszög oldalait a szokásos módon, a *DA*, *DB*, *DC* éleket pedig *e*, *f* és *g*-vel jelölve a derékszögű lapokra felírhatók a derékszögű háromszögekre érvényes Pitagorasz-tétel összefüggései:

$$e^2 + f^2 = c^2$$
$$f^2 + g^2 = a^2$$
$$g^2 + e^2 = b^2$$

A kapott egyenletrendszerből nem nehéz kifejezni az *e*, *f* és *g* négyzeteit:

$$e^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$$
$$f^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$
$$g^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

Mivel a deékszögű lapok területeit ki lehet fejezni az *e*, *f* és *g* oldalélek segítségével, most helyettesítsünk be a területre kapott képletünkbe:

$$t_{ABC}^2 = \frac{e^2 f^2}{4} + \frac{f^2 g^2}{4} + \frac{g^2 e^2}{4} =$$
$$= \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{16} +$$
$$+ \frac{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{16} +$$
$$+ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}{16}$$

A számlálókban a műveletek elvégzése és az összevonások után a következő kifejezés adódik:

$$t_{ABC}^2 = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}$$

Kifejtéssel könnyen meg lehet győződni róla, hogy ez megegyezik a bizonyítandó képlettel.

Irodalom

[1] А. Д. **Белий:** Формула Герона (КВАНТ 1986/10) (20. old.)

[2] H. S. M. **Coxeter:** A geometriák alapjai (29. old.)

[3] **Hajós** György: Bevezetés a geometriába (316. old.)

[4] **Hódi** Endre – **Vadkerty** Tibor: A Héron-féle háromszögekről (A Matematika Tanítása 1979/2)

[5] A. P. **Juskevics:** A középkori matematika története (165. és 168. old.)

[6] **Kazarinoff:** Geometriai egyenlőtlenségek (53-54., 73-76. old.)

[7] Dr. **Kelemen** József: A Héron-féle háromszögekről (A Matematika Tanítása 1979/6)

[8] Edward **Kofler:** Fejezetek a matematika történetéből (165. old.)

[9] Dr. **Lévárdi** László – **Sain** Márton: Matematikatörténeti feladatok (108. old.)

[10] Dr. **Pelle** Béla: Geometria (161. oldal)

[11] **Pólya** György: A problémamegoldás iskolája I. kötet (59. old.)

[12] **Pólya** György: A plauzibilis következtetés (226. old.)

[13] **Rácz** János: Trigonometriai azonosságok igazolása elemi geometriai úton (A Matematika Tanítása, 1988/3)

[14] **Reiman** István: A geometria és határterületei (53. 68. 69. 246. old.)

[15] **Reiman** István: Vektorok a geometriában (98. 162. old.)

[16] **Sain** Márton: Matematikatörténeti ABC (121. old.)

[17] **Scharnitzky** Viktor: Mátrixszámítás (76. old.)

[18] Dirk J. **Struik:** A matematika rövid története (66. old.)

[19] B. L. van der **Waerden:** Egy tudomány ébredése (442. old.)

Két példa a készülő 9. osztályos matematika-tankönyvből

A Mozaik Kiadó gondozásában 2001-től „Sokszínű Matematika 1–12." címmel új tankönyvsorozat indul. Ebben az évben az 5. és a 9. osztályos tankönyv jelenik meg, amely szeptembertől választható tankönyv.

Ízelítőül a 9. osztályos tankönyvből közlünk két mintapéldát, egyet a „Kombinatorika", egyet a „Függvények" fejezetből.

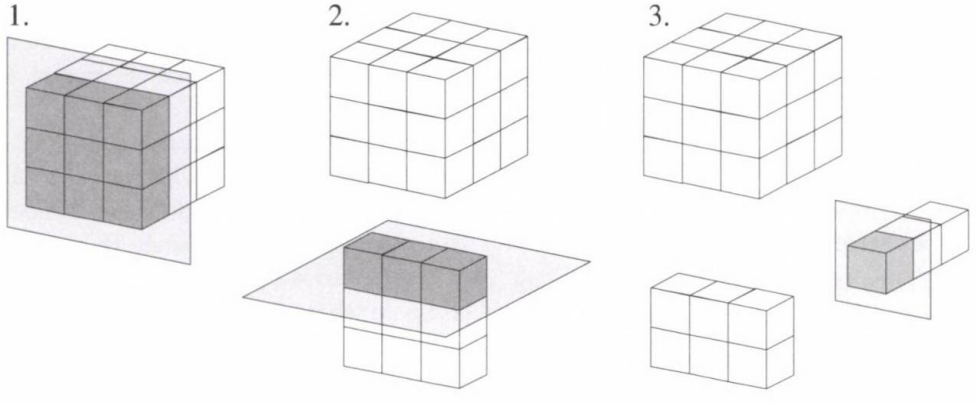
3. példa: Egy 3 egység élhosszúságú tömör fakockát piros festékbe mártunk, majd 1 egység élhosszúságú kockákra vágtuk szét a lapokkal párhuzamos vágásokkal.

(a) Legkevesebb hány vágásra van szükség, ha egyszerre csak egy darabot vághatunk ketté?

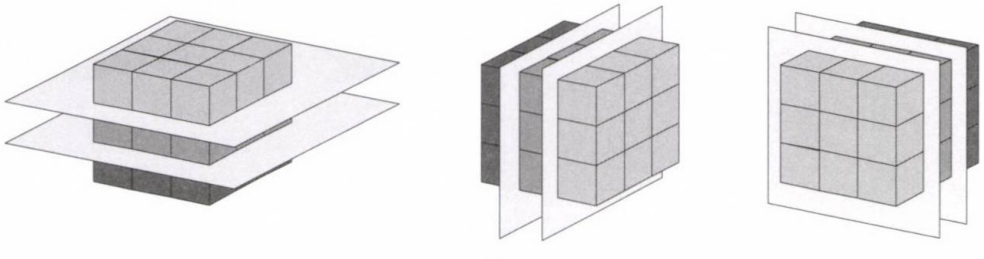
(b) Legkevesebb hány vágásra van szükség, ha egyszerre több darabot is vághatunk?

(c) Hány olyan egység kockát kaptunk, melynek nincs piros lapja, hány olyat, melynek 1, 2, 3, 4, 5, 6 piros lapja van?

(a) Próbálkozzunk! Észrevehetjük, hogy ha egyszerre csak egy darabot vághatunk ketté, akkor minden vágásnál pontosan eggyel nő a darabok száma. Mivel 1 kockából a vágások után 27 kis kocka kell legyen, így 26 vágásra van szükség (1. ábra).



1. ábra



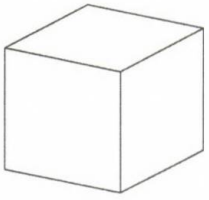
2. ábra

(b) Próbálkozzunk! Található a kockának megfelelő szétdarabolása 6 vágással, pl. a 2. ábra szerint.

A darabolás során 1 kockából $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ darab kocka lesz. Egy vágás során akár az összes darabot is kettévághatjuk, így egy vágással legfeljebb kétszeresére nőhet a darabok száma. Ha ezt (az utolsó kivételével) minden lépésben sikerülne megtenni, akkor a darabok száma sorra 1, 2, 4, 8, 16, 27 lenne, eszerint legalább 5 vágásra van szükség. Ez azonban nem elegendő, mert a középső kis kocka kiszabadításához 6 vágás szükséges, hiszen mind a 6 lapja mentén kell legyen egy vágás.

(c) Figyeljük meg, hogy az eredeti kockán hol találhatók azok a kis kockák, melyeknek ugyanannyi piros lapja van!

- Nincs olyan kis kocka, melynek 4 vagy annál több festékes lapja lenne.
- 3 piros lapja az eredeti kocka csúcsainál levő kis kockáknak van, így ezek száma megegyezik a kocka csúcsainak számával, azaz 8-cal.
- 2 piros lapja az eredeti kocka élei közepén egy-egy kis kockának van, így ezek száma megegyezik a kocka éleinek számával, azaz 12-vel.
- 1 piros lapja az eredeti kocka lapjai közepén egy-egy kis kockának van, így ezek száma megegyezik a kocka lapjainak számával, azaz 6-tal.
- 0 piros lapja az eredeti kocka belsejében 1 kis kockának van.



3. ábra

5. példa: A következő játékos feladat megoldásához az abszolút érték függvény tulajdonságait használjuk fel.

Öt gyufásdobozban az ábrán látható számú gyufaszál van (4. ábra).

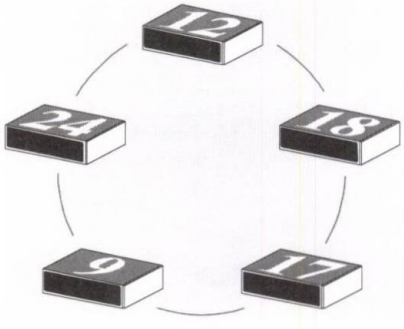
A gyufásdobozok egy kör kerületén helyezkednek el. Szomszédos gyufásdobozokból átrakhatunk egymásba gyufaszálakat. A cél az, hogy minden gyufásdobozban azonos számú gyufaszál legyen, és az összes átrakott gyufaszál száma a lehető legkisebb legyen.

A gyufásdobozokban összesen 80 szál gyufa van, a cél tehát az, hogy mindegyik dobozban 16 gyufaszál legyen.

Néhány próbálkozás után nem nehéz rájönni megoldásokra. Mi azonban azt keressük, amelyben az összes átrakott gyufaszálak száma a lehető legkisebb. Azt is jó lenne bizonyítani, hogy az a módszer, amit találtunk, és amiről azt sejtjük, hogy a legkevesebb átrakást jelenti, valóban ilyen tulajdonságú.

Induljunk ki abból, hogy a minimális átrakásnál a 24 gyufaszálat tartalmazó dobozból valamennyit át kell rakni a 9 gyufaszálat tartalmazó dobozba, jelöljük ezt a számot x-szel (5. ábra).

Ekkor a $9 + x$-et tartalmazó dobozban 16-ot kell otthagyni, és $9 + x - 16 = x - 7$-et át kell tenni a 17-et tartalmazó dobozba, amiben így $10 + x$ gyufaszál lesz. Itt ismét 16-ot hagyunk, és $10 + x - 16 = x - 6$-ot átrakunk a 18-as dobozba, itt tehát $12 + x$ gyufaszál lesz. Ebben is-



4. ábra

mét 16-ot hagyunk, és $12 + x - 16 = x - 8$-at a $24 - x$-et tartalmazó dobozba teszünk át. Így itt is $24 - x + x - 8 = 16$ lesz, ami a célunk volt.

Azt az x egész számot keressük, amelyre igaz, hogy az összes átrakások száma a legkevesebb. Hogyan számoljuk össze az összes átrakások számát?

Ha például azt találjuk, hogy $x = 5$, akkor az $x - 7 = -2$ gyufaszál átrakása nyilván azt jelenti, hogy ellenkező irányba kell 2 gyufaszálat átrakni. Ha csak az átrakások számát számoljuk, akkor az irány nem érdekes, nyilván $|x - 7|$ jelenti az átrakott gyufaszálak számát. Az összes átrakások számát tehát a következő kifejezés értéke adja meg:

$$|x| + |x - 7| + |x - 6| + |x - 4| + |x - 8|.$$

Ennek a kifejezésnek egyelőre csak azokra az egész számokra van értelme az x jelentése miatt, amelyek eleget tesznek a $-9 \le x \le 24$ kikötésnek. A még megoldandó részét a feladatnak úgy is fogalmazhatjuk, hogy keressük meg annak a függvénynek a legkisebb értékét, amely a -9 és 24 közti egész számok halmazából képez az egész számok halmazába, és az

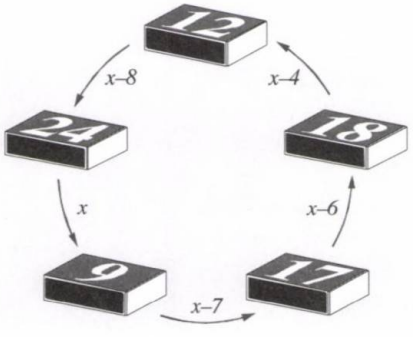
$$f(x) = |x| + |x - 7| + |x - 6| + |x - 4| + |x - 8|.$$

kifejezéssel definiáljuk.

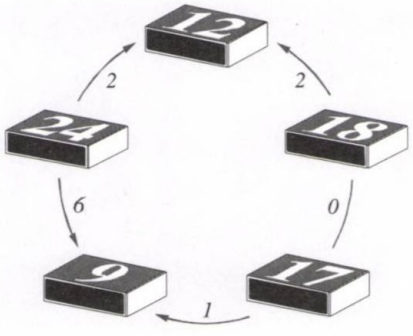
Terjesszük ki most az f függvényt az összes valós számra, azaz értelmezzük a következő g függvényt:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x| + |x - 7| + |x - 6| + |x - 4| + |x - 8|.$$

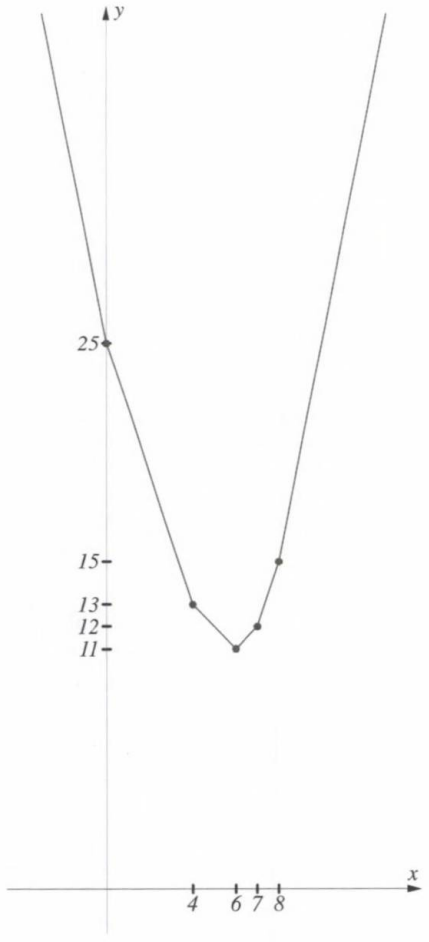
A függvény képét nem nehéz megrajzolni, hiszen egyszerű abszolút értékes kifejezések összege: 7. ábra.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

A g függvény a minimumát az $x = 6$ helyen veszi fel, a minimum értéke itt $g(6) = 11$. A 6 benne van az f függvény értelmezési tartományában is, és mivel f a g leszűkítése, f-nek is itt minimuma van, $f(6) = 11$. Eredményünk azt jelenti, hogy összesen 11 gyufaszál átrakásával célhoz érhetünk, méghozzá a következő módon: 6. ábra)

Az ábrán feltüntettük, hogy melyik dobozból melyik szomszédosba hány gyufaszálat kell átrakni. Megjegyezzük, hogy lényegében a játékos feladat megoldási módszerével sokkal komolyabb, szállításokkal kapcsolatos feladatokat is meg lehet oldani.

Nézzük még meg azt az esetet, ha valaki máshonnan indul el, például x-szel jelöli azoknak a gyufaszálaknak a számát, ahányat a minimális megoldás esetén a 17-es dobozból a 9-esbe kell átrakni. Ekkor teljesen hasonló számolással, mint az előző esetben, sorra azt kapjuk, hogy az egyes dobozokból az ábrán jelölt módon $x-7$, $x+1$, $x-3$ és $x-1$ gyufaszálat kell átrakni (8. ábra).

Az összes átrakások számát itt az

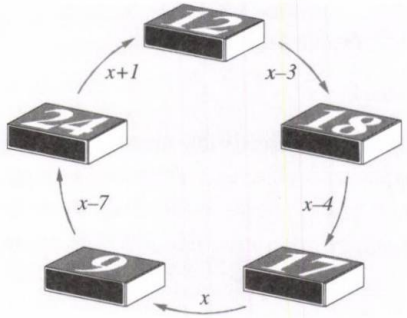
$$|x| + |x-7| + |x+1| + |x-3| + |x-1|$$

kifejezés adja meg.

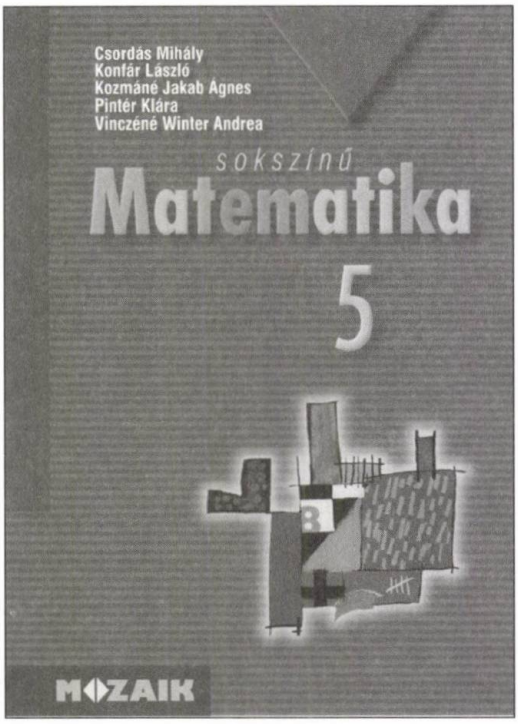
Ennek megfelelően itt az összes valós számra kiterjesztett

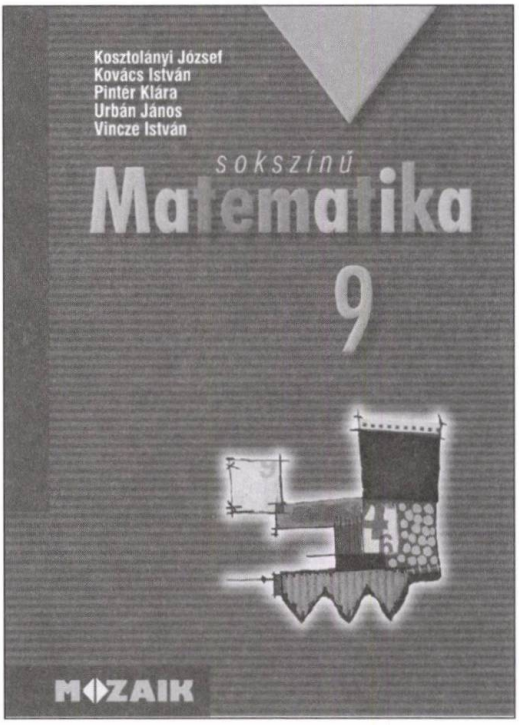
$$h(x) = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-3| + |x-7|$$

függvény minimumát keressük. Ezt az $x = 1$ helyen veszi fel, és értéke $h(1) = 11$, mint az előző esetben, a szükséges átrakások is pontosan az előző esetnek megfelelően adódnak.



8. ábra





FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: **(Figyelem, a házszámot az önkormányzat megváltoztatta!)** 6757 Szeged, Miklós u. **27.** Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 2001. május 31.**

170. Egy nyári matematika táborban 60 gyerek vett részt. Tudjuk, hogy bármely 10 táborozó tanuló között van legalább 3 olyan, akik ugyanabban a faházban laknak. Igaz-e, hogy van olyan faház, amelyben legalább 15 táborozó lakik?

171. Melyik az a legkisebb egész oldalhosszúságú négyzet, amely köré úgy tudunk írni egy egész oldalhosszúságú derékszögű háromszöget, hogy a négyzet két csúcsa a háromszög átfogójára, másik két csúcsa egy-egy befogóra illeszkedik?

172. Van-e olyan konvex ötszög, amelyet egyetlen egyenes vágással úgy tudunk két részre bontani, hogy az egyik rész az eredetihez hasonló ötszög?

173. Mutassuk meg, hogy ha vannak olyan x, y, z pozitív egész számok, amelyekre

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz,$$

akkor $z = 3$! Határozzuk meg az összes megfelelő (x, y, z) pozitív egész számhármast!

174. Az $A_1A_2...A_n$ konvex sokszög A_kA_{k+1} oldalaira ($k = 1, 2, ..., n$; $A_{n+1} = A_1$) kifelé szerkesszük meg az $A_kB_kA_{k+1}$ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy az $A_1A_2...A_n$ és $B_1B_2...B_n$ sokszögek súlypontja egybeesik!

Bencze Mihály, Brassó

Feladatmegoldások (155-159. feladatok)

155. Legyen n egy adott összetett természetes szám. Adjuk hozzá n-hez valamely d valódi osztóját. A kapott $n+d$ számmal ismételjük meg ugyanezt, és így tovább. Mutassuk meg, hogy ha $n = 4$, akkor az összes összetett szám előállítható a fenti operáció véges sokszori alkalmazásával!

Városok Viadala, 1993.

Megoldás: Legyen N egy tetszőleges összetett szám, és legyen p az N szám valamely prímosztója. Mivel N összetett, ezért $4 \le 2p \le N$. $2p$ a 4-ből megkapható, ha $p - 2$ lépésben 4-ből kiindulva mindig 2-t adunk az előzőleg kapott számhoz. Ha $N = N'p$, akkor N a $2p$-ből megkapható, ha $N' - 2$ lépésben $2p$-ből kiindulva az előzőleg kapott számhoz mindig p-t adunk.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 7.

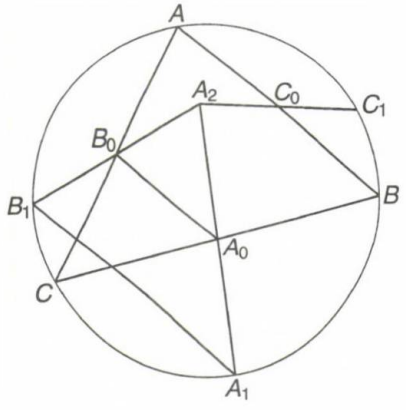
156. Tekintsük az ABC háromszöget és a körülírt körét. Legyen A_1 az A-t tartalmazó átmérő másik végpontja, A_0 a BC oldal felezőpontja, A_2 pedig az A_1 pont A_0-ra vonatkozó tükörképe. B_2 és C_2 hasonló módon nyerhetők a B, illetve C pontokból kiindulva. Bizonyítsuk be, hogy A_2, B_2 és C_2 egybeesnek!

Városok Viadala, 1994.

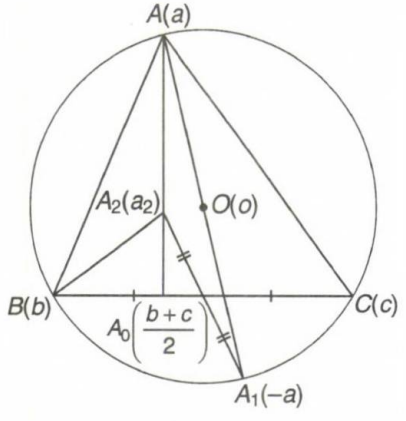
I. megoldás: Az A_1 és B_1 pontok konstrukciójából adódik, hogy az A_1B_1 szakasz párhuzamos és egyenlő hosszúságú az AB szakasszal (*1. ábra*). Mivel A_0B_0 az ABC háromszög középvonala, ezért A_0B_0 is párhuzamos az A_1B_1 szakasszal és $A_1B_1 = 2 \cdot A_0B_0$. Az A_1A_0 és a B_1B_0 egyenesek metszéspontja ennélfogva olyan pont, amelynek A_0-ra vonatkozó tükörképe A_1 és B_0-ra vonatkozó tükörképe B_1. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy A_2 és B_2 egybeesik. Hasonlóan látható be, hogy A_2 és C_2 is egybeesik, ami az állítást bizonyítja.

II. megoldás: Mivel AA_1 a körülírt kör átmérője, ezért a Thalesz-tétel alapján $ACA_1\sphericalangle = ABA_1\sphericalangle = 90°$. Tudjuk, hogy CA_1 merőleges AC-re, ezért az A_0-ra vonatkozó tükörképe, BA_2 is merőleges lesz AC-re. Ez pedig azt jelenti, hogy A_2 illeszkedik a B csúcsból induló magasságvonalra. Ha a BA_1 szakaszt tükrözzük az A_0 pontra, akkor kapjuk, hogy az A_1 pont A_2 tükörképe rajta van a C csúcsból induló magasságvonalon. A_2 tehát az ABC háromszög magasságpontja. Hasonló gondolatmenettel látható be ugyanez a B_2 és C_2 pontokról is. Ezzel az állításon túl azt is bebizonyítottuk, hogy a tekintett pont a háromszög magasságpontja.

Kiss Géza, Kisújszállás



1. ábra



2. ábra

III. megoldás: Helyezzük el az ABC háromszöget a komplex számsíkon úgy, hogy a köréírt kör középpontja legyen az origó. Az egyes pontokhoz tartozó komplex számokat a *2. ábrának* megfelelően jelöljük.

Mivel A_0 az A_1A_2 szakasz felezőpontja, ezért

$$\frac{a_2 - a}{2} = \frac{b + c}{2},$$

ahonnan

$$a_2 = a + b + c.$$

Teljesen hasonló módon adódik, hogy $b_2 = a + b + c$ és $c_2 = a + b + c$, azaz a tekintett pontok valóban egybeesnek. A felírásból az is látható, hogy ez a pont a háromszög magasságpontja.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 8.

157. A pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozatra teljesül, hogy bármely pozitív egész n esetén az $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ egyenletnek van valós gyöke. Van-e ilyen tulajdonságú végtelen sorozat? Adjunk meg egy 10 tagból álló megfelelő sorozatot!

Városok Viadala, 1994.

Megoldás: Ha van a feladat feltételének megfelelő végtelen sorozat, akkor

$$a_{n+1}^2 \geq 4a_{n+2}a_n \qquad (1)$$

bármely pozitív egész n esetén. Legyen $b_m = a_m/a_{m+1}$ $(m = 1, 2, ...)$. Ezzel (1) a

$$b_{n+1} \geq 4b_n$$

alakot ölti, ahonnan

$$b_m \geq 4^{m-1}b_1. \qquad (2)$$

A $\{b_m\}$ sorozat definíciója és (2) alapján

$$\frac{a_1}{a_{k+1}} = b_1b_2...b_k \geq 4^{1+2+...+(k-1)}b_1^k = (2^{k-1}b_1)^k \quad (3)$$

bármely pozitív egész k esetén. (3)-ból adódik, hogy

$$a_{k+1} \leq \frac{a_1}{(2^{k-1}b_1)^k}. \qquad (4)$$

(4) alapján könnyen látható, hogy akármilyen nagy is a_1 és akármilyen kicsi is b_1, elegendően nagy k értékekre $a_{k+1} < 1$, ami ellentmond annak, hogy az $\{a_n\}$ sorozat tagjai pozitív egészek. Megfelelő végtelen sorozat tehát nincs.

10 tagú véges sorozat (3) és (4) alapján konstruálható: $a_{10} = 1$, $a_9 = 4^9$, $a_8 = 4^{9+8}$, $a_7 = 4^{9+8+7}$, ..., $a_2 = 4^{9+8+...+2}$, $a_1 = 4^{9+8+...+1}$.

Dályay Pál Péter (Szeged) és Schuler László (Budapest) megoldása alapján

Megjegyzés: Ha k tetszőleges pozitív egész szám, akkor létezik a feladat feltételeit kielégítő k tagú ilyen sorozat, például az $\{a_n\}_{1\leq n\leq k}$, $a_n = 2^{(k-n)(n-1)}$ általános tagú sorozat ilyen. Látható, hogy az így megadott sorozatok olyanok, hogy a megfelelő másodfokú egyenleteknek egy darab kétszeres valós gyökük van. Tetszőleges k-ra van olyan k tagú sorozat is, amelyre a megfelelő másodfokú egyenleteknek két különböző valós gyökük van. Ilyenek például az $\{a_n\}_{1\leq n\leq k}$, $a_n = 2^{(n-1)\frac{2m-3n+6}{2}}$ alakú sorozatok, ahol m egy olyan egész szám, amelyre érvényes a $3k - 6 \leq 2m$ egyenlőtlenség. Ha $m = 12$, akkor az $\{a_n\}_{1\leq n\leq 10}$, $a_n = 2^{\frac{3(n-1)(10-n)}{2}}$ tíztagú sorozatra

$$a_{n+1}^2 - 4a_na_{n+2} = 2^{3n(9-n)} - 2^{3n(9-n)-1} > 0$$

minden olyan egész n esetén, amelyre $1 \leq n \leq 8$.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 4.

158. Igazoljuk a következő azonosságot!

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{[k/2]} \cdot 2^{n-k} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

([x] az x valós szám egész részét jelöli.)

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Tekintsük a következő hatvány kifejtését:

$$(x^2 + 1 - 2x)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+1)^k(-1)^{n-k}2^{n-k}x^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{n-k+2i},$$

ahonnan látszik, hogy a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{[k/2]}2^{n-k}$$

összeg éppen az x^n és x^{n-1} együtthatóinak összege.

Másrészről

$$(x^2+1-2x)^n = (1-x)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n}(-1)^j\binom{2n}{j}x^j,$$

így az x^n és x^{n-1} együtthatóinak összege

$$(-1)^n\binom{2n}{n} + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

A két eredmény egyenlőségét felírva, majd $(-1)^n$-nel egyszerűsítve kapjuk a bizonyítandó összefüggést.

A kitűző megoldása

A feladatra nem érkezett megoldás.

159. Adott a síkon egy egységnyi sugarú kör és néhány sáv (két párhuzamos egyenes által meghatározott síkrész). A sávok szélességének összege 100. Mutassuk meg, hogy a sávok eltolhatók úgy, hogy együttesen lefedjék a körlapot!

Városdok Viadala, 1997.

Megoldás: Ha vannak egymással párhuzamos sávok, azokat eltolással egyesíteni tudjuk úgy, hogy a sávok szélességének összege nem változik, ezért tegyük fel, hogy nincs két egymással párhuzamos sáv.

Vegyünk fel a síkon egy derékszögű koordináta-rendszert, és soroljuk be a sávokat négy osztályba határoló egyeneseik meredeksége szerint. Az egyes meredekségi osztályok: $[1; \infty[$, $[0; 1[$, $[-1; 0[$, $[-\infty; -1[$. Az y tengellyel párhuzamos sávok az utolsó osztályba kerülnek, határoló egyeneseik meredekségét $-\infty$-nek vesszük.

A skatulya-elv miatt van legalább egy olyan meredekségi osztály, amelybe tartozó sávok szélességének összege legalább 25. A koordináta-rendszer alkalmas elforgatásával elérhető, hogy ez a meredekségi osztály a $[0; 1[$ intervallumba eső meredekségű sávokat tartalmazza. Legyenek az ide tartozó sávok növekvő meredekségi sorrendben $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

A koordináta-rendszer elforgatható úgy, hogy az S_1 sáv vízszintes (az x tengellyel párhuzamos) legyen. Messük el az S_1 sávot egy függőleges e egyenessel, az alsó éllel vett metszéspont legyen B_0, a felső éllel vett metszéspont pedig B_1. Ezután S_2-t toljuk el úgy, hogy alsó éle illeszkedjen B_1-re. Ebben a helyzetben S_2 felső élének és e-nek a metszéspontja legyen B_2. Folytassuk ezt az eljárást, azaz a sávokat tologassuk el úgy, hogy S_{k+1} alsó éle illeszkedjen B_k-ra, felső éle pedig messe e-t B_{k+1}-ben $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

A sávok ilyetén eltolása után jelölje S_n felső és S_1 alsó élének metszéspontját A. Az AB_0B_n háromszöget teljesen lefedi az $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ ponthalmaz. Mivel a $B_{k-1}B_k$ szakasz hossza legalább akkora, mint az S_k sáv szélessége $(k = 1, 2, \ldots, n)$, ezért $B_0B_n \geq 25$. Az egyes sávok meredekségei az eltolások során nem változtak, ezért $B_nAB_0\sphericalangle \leq 45° \leq AB_nB_0\sphericalangle$, amiből adódik, hogy $AB_0 \geq B_0B_n \geq 25$. Mivel a B_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ pontok az e függőleges egyenesre illeszkednek, A és B_0 pedig S_1 vízszintes alsó élére, ezért a tekintett háromszögben B_0-nál derékszög van. Így könnyen látható, hogy ez a háromszög „bőségesen" lefedi az egységnyi sugarú kört, csak az egész ábrát megfelelően el kell tolni.

A megoldók száma: 1.

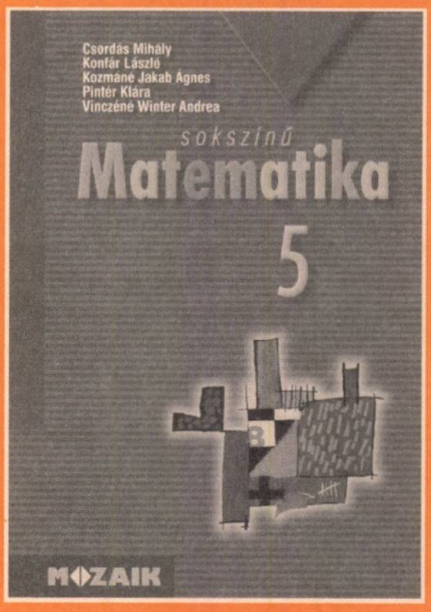
A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (156.); Dályay Pál Péter, Szeged (155-158., 159. 3 mód); Kiss Géza, Kisújszállás (155., 156.); László Sándor, Szombathely (155., 156.); Nagy Lajos, Kisújszállás (155., 156.); Schuler László, Budapest (155-157.); Simon József, Csíkszereda (155-157.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (155., 156. 2 mód, 157.).

KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

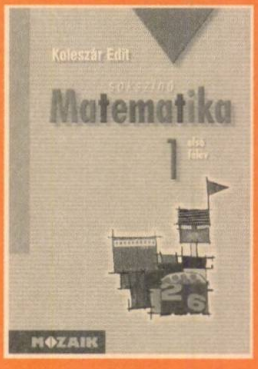
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

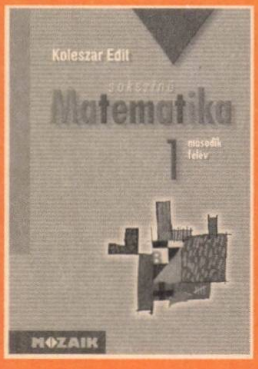
színes tankönyvsorozat 2001-ben az 1., 5. és 9. osztályos kötetekkel indul. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

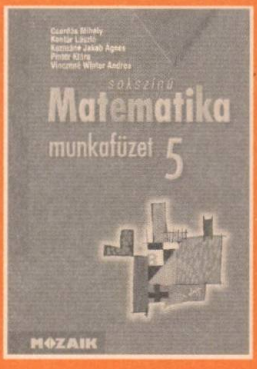


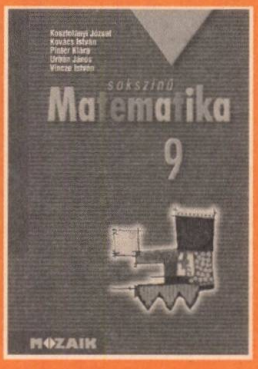
A kötetek szerzői: *1-4. osztály:* Koleszár Edit; *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A TANKÖNYVCSALÁD NÉHÁNY TOVÁBBI KÖTETE









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGHY SZOLNOK 2

A matematika alkalmazásai az oktatásban

(Ambrus Gabriella)

Ismerkedés a matematikai szakmódszertannal

(Peller József)

A parabola mely pontokból látszik ugyanakkora szögben?

(Fitos László)

IX. ÉVFOLYAM 2001 3

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 980 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

A matematika alkalmazásai az oktatásban – a gyakorlatorientált matematikaoktatás tegnap és ma
Ambrus Gabriella adjunktus, Budapest

Ismerkedés a matematikai szakmódszertannal
Peller József ny. egyetemi docens, Budapest

A parabola mely pontokból látszik ugyanakkora szögben?
Fitos László ny. főiskolai docens, Esztergom

HÍREK VERSENYEKRŐL

A tanárképző főiskolások 2001. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

A XXX. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5-8. osztály)

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

Ambrus Gabriella

A matematika alkalmazásai az oktatásban – a gyakorlatorientált matematikaoktatás tegnap és ma

A **Nat kerettanterv**-ben mind az általános, mind a középiskolai szinten megjelenik hangsúlyosan a gyakorlati élettel kapcsolatos, gyakorlatban fontos témák tárgyalásának szükségessége, nemcsak a „célok és feladatok" között, hanem a részletes követelmények említik is, osztályonként.

Természetesen más kérdés az, hogy mi valósul meg a célkitűzésekből, mennyire sikerül és mennyire kell szakítani a korábbi hagyományokkal és mennyire sikerül arányaiban és tartalmában is megfelelően beilleszteni a gyakorlatorientált feladatokat esetleg új tartalommal és formában a matematikaoktatásba.

Alkalmazott matematika – elméleti matematika

A matematika a történelem folyamán mindig olyan tudomány volt, melynek a valóságos problémák megoldásában betöltött szerepe nem vitatható. Gondoljunk csak a gondosan tervezett piramisokra, templomokra, erődítményekre, vagy a geológiai, asztronómiai eredményekre. Érdemes azon is elgondolkodni, hogy az ókortól a XIX. századig gyakorlatilag nincs olyan matematikus, aki ne lett volna egyidejűleg jelentős alakja más tudományoknak is, leginkább természettudományoknak. Említhető itt *Euklides, Archimedes, Descartes, Kepler, Newton, Leibniz, Euler,* s persze a sor korántsem teljes.

A gyakorlati/alkalmazott és az elméleti matematika először a XIX. században, de leginkább a XX. században különült el egymástól.

Ennek oka leginkább a XIX. század vége felé a matematikában kibontakozó formalizmusra való törekvés, amely a matematikát szabályok szövevényeként képzelte el s próbálta leírni. A kor vezető matematikusát, **David Hilbertet** és követőit egyáltalán nem foglalkoztatta, hogyan alkalmazható a matematika a világra, a természetre.

Természetesen igen megrázó volt, amikor kiderült, hogy a matematikai igazság több, mint egy axiómákból és szabályokból álló rendszer, **Kurt Gödel** bécsi fiatal matematikusnak köszönhetően. (Gödel-tétel)

A formalista irányzat azonban tovább élt, és az ún. „tiszta" (elméleti) és alkalmazott matematika szétválását erősítette.

A matematika elméletének és a gyakorlatának összefonódása azonban továbbra is tapasztalható több területen. Gondoljunk csak például a lineáris optimalizációra (1937-től) vagy a hálóelméletre (1957-től). Érdemes azt is megjegyezni, hogy például az egész valószínűségszámítás vagy a numerikus módszerek is olyan területek, amelyeknek gyökerei matematikán kívüliek.

Természetesen vannak olyan példák is, amelyek éppen ellenkező irányú kapcsolatra utalnak. Több számelméleti eredmény döntő szerepet játszott az 1950 körül megalkotott „kódelmélet"-ben , a Boole-algebra szerepe pedig különösen a számítógépek első generációjában volt jelentős.

Az elméleti és gyakorlati matematika összefonódása figyelhető meg például *Neumann Jánosnál* is, akinek gazdag elméleti matematikusi életpályájának utolsó állomását jelentették a számítógépek.

Rényi Alfréd a következőképpen vall az alkalmazott matematikáról a „Dialógusok a matematikáról" c. könyvében, ahol nézeteit történeti keretben, adja elő:

„Hierón

Mielőtt a matematika alkalmazásairól kérdeznélek, először valami egészen mást akarok kérdezni. Miért volt annyira fontos számodra, hogy a matematika alkalmazhatóságára vonatkozó gondolataid köztudomásra jussanak?

Arkhimédész

Lehet, hogy naiv voltam, de azt hittem, hogy meg tudom változtatni a történelem menetét. Aggódtam a mi görög világunkért. Azt gondoltam, hogy ha széles körben alkalmazni fogjuk a matematikát – ami végeredményben görög találmány, és én azt hiszem –, a görög szellem legjellemzőbb és legnagyobb vívmánya, talán még meg tudjuk menteni a mi görög életformánkat. De most már látom, hogy ezzel elkéstünk. A rómaiak nemcsak Sirakuzát, hanem a többi görög várost is el fogják foglalni; a mi időnk lejárt.

Hierón

Szerintem a mi görög kultúránk ez esetben sem megy veszendőbe, mert a rómaiak át fogják venni....

Arkhimédész

A rómaiak sohasem fogják a matematikát igazán megérteni. Túlságosan is gyakorlati gondolkozásúak, az elvont gondolatokhoz nincsen érzékük.

Hierón

Annál jobban érdekli őket a matematika gyakorlati alkalmazása.

Arkhimédész

Az elvont matematikát és annak gyakorlati alkalmazásait nem lehet elválasztani. Aki elutasítja az elvont matematikát, az eltorlaszolja maga előtt az utat a matematika alkalmazásaihoz is. Aki a matematikát sikerrel akarja alkalmazni a gyakorlatban, annak álmok álmodójának kell lennie." (Rényi, 1966, 71-72.o.)

A világ tele van matematikával, vallja **Barrow** asztrofizikus (1996).

És miért? – mert mi, a világ matematikára képes „része" a világot így fogjuk fel. Hogyan matematikai a világ? Pontosan nem tudjuk. Sokáig a szimmetriát keresték a törvényszerűségek leírásában, ma előtérbe került az ún. „káoszkutatás", amelyben azokat a rendszereket vizsgálják, amelyek (leegyszerűsítve) kis változásokra is igen érzékenyen reagálnak. Ezekben a vizsgálatokban fontos szerep jut a számítógépeknek, hiszen az itt adódó számítások már „kézzel" nem végezhetők el. Ennek alapján már nem is igazán a „tiszta"-alkalmazott matematika összefüggése az érdekes.

Új tudományág van születőben a „kísérleti matematika". Barrow úgy véli, hogy ez az új matematikai tevékenység a matematikának mint tudománynak a fejlődését is befolyásolni fogja. (Barrow, 1996, vö. 87-88.o.)

Az alkalmazott matematika, Humenberger (1995) szerint leginkább *„beállítottságnak, nézőpontnak, ill. a matematika egyfajta művelésének tekinthető, amelyet az jellemez, hogy a teóriák nem csupán öncélúak, hanem matematikán kívüli problémák megoldásához is hozzájárulnak, és hogy benne a valóságos helyzetek matematizálása (modellek), közelítő eljárások, ... matematikán belüli és kivüli kapcsolatok, numerikus és valószínűségszámítási jelleg, kreatív és önálló munka... fontos szerepet kap." (16.o.)*

2. Az alkalmazott matematikaoktatás hagyományaiból

A matematika, illetve számolástan oktatása is összefonódott az alkalmazások oktatásával.

A XV. század végéig a tanítás az ún. kolostor vagy latin iskolákban folyt. Jó latin nyelvtudásra volt szükség, hogy valaki ott tanulmányokat végezhessen. Egyre inkább nyilvánvalóvá vált

azonban, hogy a kereskedőknek, hivatalnokoknak, építőmestereknek, és más mesteremberekneknek is szüksége van bizonyos ismeretekre az olvasás, írás, és számolás terén, megpedig saját anyanyelvükön.

Emiatt a XVI. században már például több német városban a város által fenntartott olvasó és számolóiskolákat létesítettek. Annabergben ekkoriban 14 városi iskola működött már, és emellett létezett 4 magán számolóiskola is. Ezek egyikét tartotta fenn *Adam Ries* (1492-1559), az ismert középkori számolómester. *(1. ábra)*

A. Ries nem járt egyetemre, latin iskolát végzett, majd néhány évig járta a világot és több helyen is folytatott tanulmányokat. 1518-ban telepedett le Annabergben és számolóiskolát alapított. Szerzője több korabeli számolókönyvnek. A számolástanítás során számolótáblát használt, de nagy súlyt helyezett az írásbeli számolásra, indiai-arab számjegyekkel. A tananyagban a négy alapművelet oktatása, műveletek törtekkel, sorozatok, százalékszámítás, hármasszabály szerepeltek. Különösen fontosnak tartotta a számítások helyességének ellenőrzését, amit ún. próbákkal végeztetett, melyek a műveletekben szereplő számok bizonyos számokkal való osztási maradékain alapultak.

Munkáival Európa-szerte híressé vált. Feladatai általában gyakorlatiasak, érdekesek.

1. Példa

1468. október 9-én Lipcse város tanácsa megvonta egy Veitz nevű pék polgárjogát. Elrendelték, hogy a nevezett a kora hajnali órákban hagyja el a várost és oda többé vissza ne térjen. Veitz ugyanis becsapta a vevőit, mivel túl kicsi súlyú kenyereket sütött.

A kenyérnek 26 Lot -t kellett volna nyomnia, ám Veitz – a vevők kárára – mindössze 10 1/2 Lot tömegűeket sütött. (1 Lot=14,6 g)

a) Számítsuk ki a tömegkülönbséget!

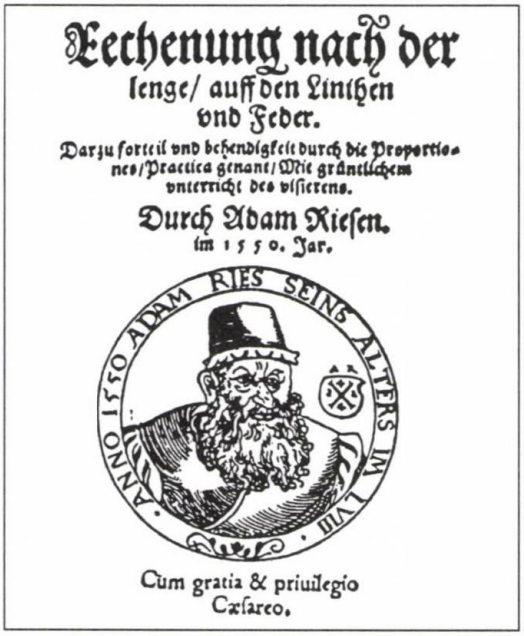
b) Hány százalékkal csapott be minden egyes vevőt így a pék?

Comenius 1657-ben megjelent Didactica Magna-jában az oktatási alapelvek között szerepel, hogy szem előtt kell tartani a gyakorlati használhatóságot .

„Bármit tanítunk, tanítsuk úgy, mint előttünk levő dolgot, melynek biztos haszna van. Tudniillik kell, hogy lássa a diák, hogy mindaz amit tanul, nem utópia vagy a platóni ideák világából való, hanem ezek minket körülvevő igazi dolgok, melyeknek helyes ismerete az életnek valódi hasznára van. Így a szellem buzgóbban kezd majd hozzá és helyesen különböztet meg."

A XVI-XVIII. században sorra jelennek meg olyan számolástannal foglalkozó tankönyvek, amelyekben fontos szerepet kap a gyakorlati alkalmazás.

Maróthi György 1743-ban Debrecenben megjelent, magyarul írt, ma is élvezhető nyelvezetű híres „Arithmetica"-ja előszavában megemlíti: olyan dolgokra igyekszik könyvével megtanítani a diákokat, amelyre a gyakorlati életben szükségük van, s hogy a példák összeállításánál, azokat különböző területekről választotta, hogy a „tanuló észre vehesse mi hasznai lehessenek a Számvetés Nemeinek a közönséges életben, és miképpen kelljen bánni a Számokkal, az illyen különböző alkalmatosságokban."


Rechenung nach der
lenge/ auff den Linihen
vnd Feder.
Darzu fortteil vnd behendigkeit durch die Proportiones/Practica genant/ Mit grüntlichem
vnterricht des visierens.
Durch Adam Rieſen.
im 1550. Jar.
ANNO 1550 ADAM RIES SEINS ALTERS IM LVII
Cum gratia & priuilegio
Cæſareo.

1. ábra

Külön részben foglalkozik a konkrét műveletekhez kapcsolódó gyakorlati feladatok után más, a mindennapi életben fontos számításokkal. Ilyen például a „Társaság regulája", amely azokat a számításokat tárja az olvasó elé, amelyekre akkor van szükség, amikor néhány kereskedő társaságba tömörülve bizonyos pénzt bead, s haszon, ill. kár esetén ki kell számítani az egyének részesedését, vagy az „Elegyítés regulája", amelyre akkor van szükség, ha különböző árú „jószágot pl. bort, búzát elegyítünk", s arra vagyunk kíváncsiak, mennyi lesz az új ára.

Külön figyelmet érdemel, hogyan számít átmérőből kerületet és viszont, ill. árnyékból toronymagasságot.

2. Példa

„Egy hordónak a' szélessége belöl (vagy a Diameterje) 31 újjnyi. Kérdés, hány újjnyi leszsz a fenekének a Kerületi...

A' Hármas Regulát így rendelem: Ha a 'Diameter 7 újjnyi; leszsz a 'Kerületi 22 újjnyi: Hát ha a' Diameter 31 újjnyi? Jö-ki 4-diknek 97 3/7."

(Az említett „hármas regula" esetén természetesen arányszámításról van szó, és a következő az eljárás: Felírom: 7 22 31
Elosztom 7-tel
az első két számot 1 22/7 31
Majd összeszorzom az
utolsó kettőt $22/7 \cdot 31 = 682/7 = 97\ 3/7$)
(Maróthi, 1743, 365. o.) (1 ujj kb. 1,9 cm)

3. Példa

„Másodszor magyarázzuk-meg még azt-is, miképen kell a' Toronynak, vagy más épületnek, vagy élö-fának a' magasságát az Árnyékából meg-tudni?

E' pedig így lehet-meg:

Mikor a' Nap fűt, akármikor, egy egyenes rudat, vagy páltzát dugj-le a' földbe, egyenesen, ónas sinór'mérték szerént. Ennek mérd-meg az árnyékát, hány újjnyi? Mérd-meg a' páltzát magát-is, de tsak azt a részét, a'melly kivül van a 'földön. Továbbá azon szempillantásban mérd-meg a' Torony' árnyékát is, a' hegyitől fogva egyenesen, nem a Torony' tövéig, hanem addig a' helyig, a'melly a' Torony tetejinek egyenesen alatta van; és a'hova p.o . a' viz a' Torony tetejiből le-tseppenne; melly rend szerént a' Torony belsö tágasságának a'leg-közepe szokott lenni. Ird le már a' Hármas Regulában, leg-elöl a' páltza árnyékát: utánna a' páltza magasságát,: 3-dik helyre a' Torony' árnyékát. E' három számhoz keress 4-diket. A' leszsz a' Torony magasságának mértéke. ...

NB. 1. Ha teá-vígyázz, és meg-várod, a'mikor a' páltzának az árnyéka egyenlövé leszsz a' magasságával; (melly nálunk , a' nyári Hónapokban , minden nap' meg-esik dél-tájban; söt aratáskor még reggeli 9, és dellyesti 3 óra tájban,) ollyankor a' Torony magassága is egyenlö az Árnyékával: és így nem kell hozzá számvetés.

NB.2. Ha az árnyék nem egyenes helyen esik, ezzel a' móddal nem lehet élni." (366-367.o.)

Corzan-Avendano Gábor, gimnáziumi mennyiségtan és természettan tanár 1865-ben kiadott „Számtani példatár"-a az elemi iskolák és a középiskolák alsóbb osztályainak készült. A szerző sokévi tanári munkája során gyűjtötte ezeket. Az „Előszó"-ban többek között a következőt olvashatjuk:

„A mennyiségtani tételek és következtetések magukban véve csak üres alakzatok, merő csontvázak, melyek csak akkor nyernek valódi életet, ha az életre alkalmaztatnak, – elméleti formák, melyeknek csak a gyakorlat ad tartalmat. Érezték ezt a mennyiségtan legelső hősei, mint pl. Newton, Euler stb., kik ezen tudomány terén évtizedekig tartott nyomozásaik fényes eredményeit nem csak tisztán elméleti munkák, hanem példatárak alakjában is iparkodtak közleni a világgal; – érzi ezt minden mennyiségtani tanár is, kinek mindennap van alkalma meggyőződni, hogy az általa előadott mennyiségtani tantétel valódilag csak akkor megy át a hallgatónak – mint mondják – „vérébe", ha azt valamely tényadatra alkalmazva , s igy mintegy megtestesülve látja."

A példatár, a megoldások mellőzésével, 3327 (!) feladatot ad közre. A feladatok között szerepel néhány mechanikus számítási gyakorlat is, de a szövegesek igen változatosak témaköreiket tekintve.

Számos statisztikai adat és érdekesség is felhasználásra került a feladatok elkészítésénél. A példatár végén jól használható táblázatok segítik a tanulókat a szövegben előforduló különböző mértékegységek, pénznemek stb. közötti eligazodásban.

Illusztrációnak a következő feladatokat választottam:

4. Példa

„Nagy Károly idejében egy hízott ökörnek az ára 5 silling volt; 22 ily silling egy font ezüstből készíttetett; mily ára volt az ökörnek tehát a mi pénzünk szerint, ha most egy félfont vagyis egy márka ezüstből 24 forintot vernek." (35.o. 3054.) (1 font=0,56 kg)

5. Példa

„Valaki a villámlás tüneményétől kezdve azon pillanatig, melyben a mennydörgést meghallja, 14 lüktetést érez üterén; ezen személynem ütere minden perczben 62-t lüktet; a hang pedig egy másodpercz alatt 1038 párizsi lábat halad; mily távolságban volt tehát még a zivatar?" (35.o. 3056. feladat) (1038 párizsi láb kb. 337,35 m)

Arányi Béla pesti gimnáziumi mennyiségtan tanár 1871-ben jelentette meg „Betűszámtani példák gyűjteménye" c. könyvét, amelyet „Gymnásiumok és reáltanodák felsőbb osztályai számára és magánhasználatra" készített. Innen származik a következő feladat:

6. Példa

„A történelem tanusítja, hogy Hiero syrakusai király egy korona készítésére 20 font szinaranyat adott át bizonyos aranyművesnek. Az elkészitett korona csakugyan 20 fontot nyomott; azonban Archimedes, korának legjelesb mennyiségtudósa, meg akart győződni arról, valjon az aranyműves nem cserélte-e ki az aranynak bizonyos részét ezüsttel. E végre Archimedes a koronát vizbe mártva mérlegelvén azt tapasztalá, hogy az a vizben 1 1/9 fonttal kevesebbet nyom, holott, ha szinaranyból volt volna csak 20/19=1 1/19 fonttal kellene kevesebbet nyomnia, miből bizton következteté, hogy a korona nem szinaranyból készült mű, mivel az ismert szabály szerint a szinarany általános sulyának 19-dik részét, a szinezüst pedig 10-ik részét veszti el a vizben. Kérdés, mennyi aranyat cserélt ki az aranyműves ezüsttel?

A XIX század későbbi éveinek tankönyveibe belelapozva általában elmondható, hogy a gyakorlatorientáltság a mindennapi számítások területére korlátozódik, ha ez egyáltalán megjelenik, ugyanis a felsőbb gimnáziumi négy osztály tankönyveiben nemigen szerepelnek ilyen feladatok. Ugyanez a tendencia figyelhető meg a XX. sz. tankönyveiben is. (100.o. 253.f.)

3. A gyakorlatorientált matematikaoktatás hagyományai Magyarországon a tanügyi rendeletek és tantervek tükrében

A XVIII. században, valamint a XIX. század első felében megjelenő tanügyi rendeletek, Ratio Educationis (1777), második Ratio (1806), Entwurf (1850) közül az első kettő leginkább a számtani oktatásra szorítkozott, valamint az ipari, mezőgazdasági alkalmazásokra. A tényleges matematika középiskolai alkalmazása az Entwurf-fal kezdődött. Ez utóbbi azonban a formális képzésre helyezi a hangsúlyt, a gyakorlati alkalmazások hiányoznak.

3.1 Gimnáziumi tantervek rövid áttekintése

Az **1861**-es tantervet a Helytartótanács adta ki. A gyakorlati alkalmazásokról egyáltalán nincs szó a matematika tanításában.

Az **1860**-as években b. Eötvös József radikális változtatásokat tervez, de korai halála megakadályozza tervei végrehajtásában.

„...metodikus tekintetben haladást mutat az előző tervekhez képest, mert legalább elvben gyakorlati alkalmazásokra súlyt helyez, továbbá az alsó fokon inkább szemlélteti, a felső fokon pedig rendszeresebb, tudományosabb tárgyalást kíván... A tanterv részleteiben azonban nem valósítja meg azt, amit általánosságban célul kitűzött. A részletekben ugyanis a gyakorlati, a célkitűzésben szereplő mindennapi életre való alkalmazásokról szó sincs, ellenben annál inkább hangoztatja lépten-nyomon a mennyiségtani igazságok szigorú és általános érvényű bebizonyításait,..." (Beke/Mikola, 1909, VIII.o.)

A Pauler-féle tanterv **(1871)** alapjául az Entwurf szolgált, a gyakorlati alkalmazások terén tehát nincs változás.

A Trefort-féle tanterv **(1879)** esetében a már idézett könyvben a következő olvasható:

„A helytartótanácsi tantervből megmaradt és a gyakorlati számítás szempontjából teljesen hiábavaló tradicionális anyagot meghagyta,... magában a tantervben, de a célkitűzésekben sincs utalás a gyakorlati alkalmazásokra – bár az utasítások ezzel tüzetesen foglalkoznak." (uo. 12.o.)

A Wlassics tanterv **(1899)** változást hozott a gyakorlati alkalmazások terén:

„Ez a tanterv néhány jelentékeny pontban tér el az előzőktől. Már célkitűzéseiben is benne foglaltatik a gyakorlati élet egyszerűbb számbeli viszonyainak felfogása. És ez egész programmot jelent. Ez a programm azután nemcsak az utasításokban, hanem magában a tantervben is kifejezésre jut ..." (uo. 13.o.)

Ez a változás nem véletlen, hiszen már a XIX. század 60-70-es éveiben voltak törekvések a matematikatanítás megreformálására, mind egyetemi, mind középiskolai szinten Európa több országában.

Magyarországon a reformtörekvések különösen a századforduló tájékán erősödtek meg. Ezen mozgalom egyik vezéralakja volt Beke Manó egyetemi tanár, aki a középiskolai matematikatanítás korszerűsítéséről a következőket írta:

„A reform elve röviden így fejezhető ki: Legyen a matematika tanítása olyan, hogy a tanulóban kifejlődjék annak tudata, mily fontos kulturális tényező a matematika. Azt akarjuk, hogy a középiskolából kikerülő tanuló bizonyos fokú matematikai iskolázottságot vigyen ki az életbe; az a reményünk, hogy ily módon a 'matematikai gondolkodásmód' bele hatol a közéletbe. A tanulónak látnia kell, hogy a matematika mennyi szállal van összekapcsolva a gyakorlati élettel, a tudományokkal és az egész világfölfogásunkkal. Mert csak olyan ismeret gyakorolhat hatást az emberek gondolkozásmódjára, amely nincs izolálva, hanem rendes eszméinkkel és szokott tevékenységünkkel szoros kapcsolatban van." (uo. 200.o.)

Noha 1913-ban a Képviselőházban bejelentik, hogy megvalósításra kerülnek a reformok, a háború és a politikai változások miatt késik az új tanterv.

Bár az **1926**-os tantervbe már több új témakör belekerült a reform célkitűzései közül, valójában elnagyolt. A formális matematikaoktatást hangsúlyozza.

Az **1938**-as tanterv célkitűzésekből is elmaradt a gyakorlati élet viszonyainak előtérbe helyezése.

1945 augusztus – megjelenik a nyolcosztályos általános iskolát létrehozó rendelet, így a középiskolák négyosztályosak lettek.

Az **1950**-es, **1965**-ös tantervek sem hoztak változást a gyakorlatorientáltság terén a gimnáziumi matematikaoktatásban.

Az 1979-es „A gimnáziumi nevelés és oktatás terve" a matematikatanítás céljául tűzi ki már hogy alkalmazásra kész ismereteket adjon, s a matematikatanítás feladatai között is ott szerepel, „a matematika különböző területeken való alkalmazásának bemutatása". Ugyancsak itt olvasható, hogy a nagyobb anyagrészek tervezésekor figyelni kell arra, hogy a valóság és a matematika kapcsolata (modellalkotás), vala-

mint az alkalmazások lehetőség szerint bemutatásra kerüljenek.

Hasonló célok és feladatok szerepelnek a gyakorlatorientáltság szempontjából az 1987-es tantervben (az 1979-es korrekciója) is.

A gimnáziumi oktatás történetét tekintve, az utóbbi időktől eltekintve, nem jellemző a gyakorlatorientált matematikaoktatásra törekvés a tantervek alapján.

3.2. Népiskolai és polgári iskolai tantervek áttekintése

Ezekben a tantervekben általában rendszeresen és hangsúlyosan jelenik meg a gyakorlati alkalmazások szükségessége. Néhány példa ezek közül.

Tanterv és Utasítás az elemi népiskola számára (1907):

„7. A számtan tanítása eddig is nagyjából kielégítő volt. Az Utasítás nagy gondot fordít a tanítás módszeres menetének és helyes eljárásának megállapítására. De az eddiginél nagyobb gondot kell fordítani a számtani tanítás gyakorlati oldalára, nevezetesen tárgyköreinek helyes megválasztására, általában az életben értékesítendő mozzanataira. („Utasítás " XIII.o.)

„A számtan tanításának módszere:...

5. A példák tárgyát lehetőleg minden tantárgy köréből vegyük. A példák adatai és maguk a tárgyalt számtani kérdések is a valóságnak megfelelők, ne pedig légből kapottak, a gyakorlati élettől távol állók legyenek." (86.o.)

Érdemes megjegyezni, hogy a gyakorlati életre való koncentrálás a tanítás anyagának részletezésében is megjelenik.

Tanterv a polgári leányiskolák számára (1907):

„Számtan-mértan

Czél: a) Biztosság és ügyesség a számműveletek végrehajtásában és jártasság a köznapi életben előforduló feladatok megfejtésében....

A feladatok megválasztásánál tekintettel kell lenni azon tudományokra is, melyek az illető osztályban taníttatnak, a feladatok nagyobb része azonban mégis a köznapi élet s a háztartás köréből veendő" (10.o.)

Tanterv, általános iskola V-VIII. (1958):

„Az általános iskolai számtan-mértan tanítás feladata megismertetni a tanulókkal a környező valóság legegyszerűbb mennyiségi viszonyait és térbeli formáit: megmutatni a racionális számoknak és a legegyszerűbb mértani alakzatoknak a valóságból való eredetét, néhány alapvető összefüggését és azoknak a valóságra és a gyakorlati életre, a természettudományok elemeire való alkalmazhatóságát." (107.o.)

A követelményekben részletesen is szerepelnek az előírt jártasságok és készségek, de gyakorlati rész nem.

Nevelési, Oktatási Terv, Általános iskola (1978)

A matematikatanítás célja az „... alkalmazásra képes, korszerű matematikai műveltség nyújtása,...a matematikát használni tudó fiatalok nevelése", s a gyakorlati „rész" több helyen megjelenik a követelményekben is.

Az eddigiek alapján látható, hogy

– a gyakorlatorientáltság a matematika (számtan-mértan) tanításában, ha nem is minden szinten, de folyamatosan jelen van;

– a gyakorlati számítások oktatása a középiskolai „matematika" oktatás megjelenésével az alsóbb osztályokba tevődött át, s bár jelentkezett igény ilyen feladatok középiskolai tárgyalására is (Reformmozgalmak) ezek nem sok sikerrel jártak. (vö. Beke/Mikola, 1909);

– az előbbiekből adódik, hogy a gyakorlati számítások köre leszűkült jórészt az egyszerű (közvetlen) alkalmazásokra, talán feltételezve azt, hogy elvontabb gondolkodást igénylő feladatok megoldása (ld. középiskola) alkalmassá teszik a tanulókat arra is, hogy tudásukat a gyakorlatban is felhasználják. A valóság azonban mást mutat.(ld. például nemzetközi felmérések eredményei pl. TIMSS)

4. A gyakorlatorientált matematikaoktatás mai lehetőségei

A gyakorlati alkalmazások tanítása hasznos és indokolt, ám ez nem jelenti azt, hogy kizárólag gyakorlati matematikát kellene tanítani. A matematika gyakorlati alkalmazások nélkül is szép és hasznos, és a tanárnak figyelnie is kell arra, hogy ezt megmutassa, még akkor is, ha lesznek olyanok, akik ezt nem látják, vagy nem akarják látni.

Véleményem szerint továbbra sem kell lemondani például az egyszerű gyakorlófeladatokról sem, (sőt nem is szabad), persze megfelelő arányban, és természetesen az ún. ál (pszeudó) gyakorlatorientált feladatok sem haszontalanok. Ez utóbbiak körébe sorolhatók például a „rendszeresen" téglalap alakú kertekkel kapcsolatos, különböző témakörökben felbukkanó feladatok.

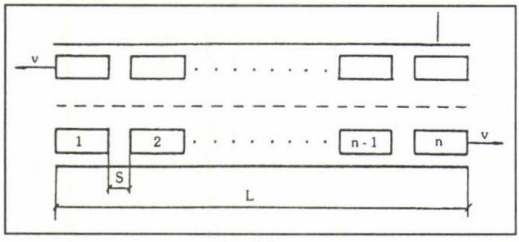
Fontos azonban, hogy realisztikus, vagy legalábbis annak látszó feladatok is szerepeljenek .

Az ilyen feladatoknak két fő kategóriája különíthető el, bár sok esetben az elválasztás nem éles:

1. Valamilyen valós problémából indul ki, készít egy matematikai interpretációt vagy modellt. Ezen a modellen dolgoznak a továbbiakban a matematika segítségével, majd alkalmazzák az eredményt az eredeti feladat megoldására pl. biológiai, társadalomtudományi problémák esetében.

2. A matematika alkalmazása a valós életben. Szokták „User's Mathematics"-nek is nevezni. Ha példáinkat megnézzük, jórészt ebből a kategóriából valók. Ezen példák egy része nem is nevezhető igazi matematikainak, hiszen csak egyszerű, mindennapi számításokról van bennük szó.

A továbbiakban néhány példa következik különböző szintű gyakorlatorientált feladatra.



2. ábra

4.1. Modellek a gyakorlatorientált feladatokban

Mivel a valóság igen összetett, gyakran van szükség a tényleges helyett egyszerűbb helyzet vizsgálatára. A *modellkészítés* lehet *statikus* vagy *dinamikus*. Az előbbi esetben egy viszonylag egyértelmű, a valóságos helyzetet elég jól megközelítő struktura megkereséséről van szó. A második esetben a modellek további változtatásoknak lesznek alávetve, s eszerint további két modelltípust különböztethetünk meg: az *iterációs modellalkotást*, melynek során a modellalkotás folyamatát többször megismételve addig próbálunk ki újabb és újabb modelleket (modellfinomítás), amíg egy modell a valóságos tartalomnak megfelelővé válik; a másik lehetőség az ún *paraméterváltoztatás*, melynek során a modellben szereplő paramétereket változtatjuk addig, amíg azok megfelelő módon adják vissza a tényleges helyzetet. Ez utóbbit természetesen akkor érdemes használni, ha modellünk helyességéről elvileg meg vagyunk győződve, és általában az „iterációs modellalkotáshoz" kapcsolódóan érdemes alkalmazni.

1. Példa

Autópályajavítás miatt az egyik irányt teljesen le kell zárni, és ezt a forgalmat átterelik a másik irány egyik sávjára. Így mindkét irány számára egy-egy sáv marad. Ezen az 5 km-es szakaszon nagyobb forgalom mellett torlódás és kocsisor alakulnak ki. Figyelembevéve a szükséges biztonsági távolságot az autók között, mekkora sebesség mellett tud a legtöbb autó elhaladni egy óra alatt ezen az építési szakaszon? Dolgozz ki egy lehetőséget! [Henning/ Wolan 1992, idézi Humenberger 1995, 38.o.]

Vezessük be a következő jelöléseket (2. ábra):

A – az óránként ezen az útszakaszon áthaladó járművek száma

L – az építési szakasz hossza

v – egy autó, ill. a kocsisor sebessége

S(v) biztonsági távolság az autók között (v-től függően)

t – egy autó áthaladási ideje az útszakaszon

n – az autók száma az építési szakaszon.

Általában feltesszük, hogy

– minden autó állandó (v) sebességgel halad át az útszakaszon,

– a biztonsági távolság az autók között mindenütt ugyanakkora,

– mindig n autó tartózkodik az építési szakaszon.

A feladatunk tehát az, hogy A-t kifejezzük v függvényében, majd a kifejezést vizsgáljuk (maximáljuk).

1. Modell

Az S biztonsági távolságnak legalább akkorának kell lennie, hogy adott v sebesség mellett valamely a „lassulással" (negatív gyorsulás), amely az autótól és az út, ill. időjárási viszonyoktól függ, ekkora szakaszon a gépkocsi meg tudjon állni. (Például választható ehhez egy átlagos érték, némi rátartással, amely 5 m/s^2.)

Megfelelő ismeretek alkalmazásával a fizikából ($S=a/2 \cdot t^2$, $t=v/a$), rögtön következik, hogy $S= v^2/2a$.

Ez a biztonsági távolság fogja első modellünkben meghatározni, hogy hány autó található egyidejűleg az építési szakaszon.

Először hagyjuk figyelmen kívül a járművek hosszát, tegyük fel, hogy ez elhanyagolhatóan kicsi a járművek közötti biztonsági távolsághoz képest. (Az majd kiderül, hogy nem így van)

Így $n= L/S$ adódik.

Egyenletes sebességet feltételezve $t=L/v$.

Most azt kell meggondolnunk, mitől függ egyáltalán az útszakaszon időegység alatt áthaladó járművek száma. Nyilvánvalóan n állandó. Más szóval, amíg egy autó áthalad az útszakaszon, minden előtte levőnek el kell hagynia az útszakaszt. Ha t másodperc alatt n autó halad tehát át, akkor óránként : $A= n/t \cdot 3600$.

Így tehát A a következőképpen fejezhető ki:

$$A= (L/S)/ (L/v) \cdot 3600=$$
$$v/S \cdot 3600= v/ (v^2 /2a) \cdot 3600$$
$$A= 2a/v \cdot 3600$$

ahol v (m/s), a (m/s^2) egységekben van megadva.

E képlet alapján tehát modellunkben A annál nagyobb (mégpedig korlátlanul !) minél kisebb v. Azonban nyilvánvaló, hogy kis sebesség esetén ez nem lehet jó. Lépésben haladás esetén $(v \mid 1m/s)$ $2a \mid 2 \cdot 5=10$ autó haladna át másodpercenként, ami lehetetlen.

A modell tehát további finomításra szorul.

2. Modell

Vegyük most figyelembe az előbbi modellnél elhanyagolt járműhosszat. Most tételezzük fel, hogy a járművek átlagosan egyforma hosszúságúak (s). Ez ugyanis nem lehet elhanyagolhatóan kicsi, a biztonsági távolságot tekintve. Vegyük például a kocsisor sebességét 10 m/s = 36 km/h-nak, ami elég reális adat. Ekkor az előbbiek alapján

$S=v^2/2a=100/10= 10$ m, és ez tényleg nem elhanyagolható egy 4-6m-es járműhöz képest.

Így tehát a továbbiakban egy jármű helye S+s. Ennek alapján A-ra a következő érték adódik:

$$A= v/(S+s) \cdot 3600= v/(v^2/(2a+s) \cdot 3600$$

A továbbiakban A maximumának meghatározásához használhatunk például deriválást (ekkor $v(opt)=\sqrt{2as}$), de számítógéppel, vagy programozható zsebszámológéppel „próbálgatóalgoritmus" is készíthető. Ha $a \mid 5m/s^2$, és $s \mid 5m$, akkor $v(opt) \mid 7m/s \mid 25$ km/h, ami már egy elfogadható érték. Ha ezt az értéket behelyettesítjük az A-ra kapott előbbi képletbe, akkor még mindig irreálisan magas érték adódik az áthaladó autók számára, óránként:

$$A \mid 7/(49/10+5) \cdot 3600 \mid 2500$$

WESTEL 900

Vajon melyik díjcsomagot válasszam, hogy a lehető legjobban járjak?

Három mobiltelefon tulajdonos telefonálási szokásait vizsgáltuk. Mindhárman a hívásaik felét hálózaton belül és felét hálózaton kívül bonyolítják le.

1. telefonáló: Fontos Géza kizárólag 8-16-ig telefonál, mert nem szereti a mobiltelefont és a munkaidő lejártával kikapcsolja.
2. telefonáló: Cserfes Gizi csak munkaidő után telefonál (főnöke nagyon szigorú). Hívásainak kb.
   - 50%-át 16-20-ig
   - 20%-át 20-22-ig
   - 20%-át éjszaka (22-06 között)
   - 10%-át hétvégén nappal bonyolítja.
3. telefonáló: Átlag Béla egyforma valószínűséggel telefonál a nap bármely szakában.

Feladat:

1. Ábrázold az egyheti telefonálás költségfüggvényét a 3 telefonáló esetében (változó: heti telefonálási idő percben), és határozd meg, hogy attól függően, hogy mennyit telefonálnak, melyik díjcsomagot érdemes választani.
2. Készítsd el a saját költségfüggvényedet is.

	SZERVUSZ	Eurofon II	MobilMester
	12375 Ft	12375 Ft	12375 Ft
Havi előfizetési díj	2875**	4750***	3625***
Belföldi, hálózaton kívülre történő hívás esetén a percdíj munkanapokon			66,25 Ft
Belföldi, hálózaton kívülre történő hívás esetén a percdíj pihenő és ünnepnapokon			40,00 Ft
Belföldi, hálózaton kívülre történő hívás esetén a percdíj csúcsidőben	123,75 Ft	70,00 Ft	
Belföldi, hálózaton kívülre történő hívás esetén a percdíj minden egyéb időben	40,00 Ft	43,55 Ft	
Hálózaton belüli hívás esetén a percdíj csúcsidőben	123,75 Ft	60,00 Ft	66,25 Ft
Hálózaton belüli hívás esetén a percdíj hétvégén és ünnepnapokon (kivéve éjjel)	25,00 Ft	25,00 Ft	25,00 Ft
Hálózaton belüli hívás esetén a percdíj éjjel	12,50 Ft	12,50	12,50 Ft
Hálózaton belüli hívás esetén a percdíj minden egyéb időben	35,00 Ft	35,00 Ft	66,25 Ft
Csúcsidő	Munkanapokon 8.00 és 16.00 óra között		Munkanapokon 7.00 és 20.00 óra között
Éjjeli időszámítás (hálózaton belüli hívások és Hangpostás felhívása esetén)	Mindannap 22.00 és 6.00 óra között		

3. ábra

Pontgyűjtési útmutató

Hogyan juthat CORA Bizalompontokhoz?

A látogatásért járó pontok:
A napi első vásárláskor 1000 Ft-ot meghaladó vásárlás esetén 1 pontot kap: ha hétfőn vásárol áruházunkban 1000 Ft felett, akkor 3 pontot szerezhet, ha bevásárlókocsiban található érték meghaladja a 15 000 Ft-ot, akkor további 5 pontot kap.

Az összegért járó pontok:
Amenyiben Ön egy naptári hónap alatt több, mint 30 000 Ft-ot költ el ugyanabban az áruházunkban, 20 bónuszponttal gyarapíthatja a kártyáján meglévő pontokat.

A pénztárnál történő áthaladás:
Blokkjára minden alkalommal személyre szóló üzenetet kap, amely a kereskedelmi adatok mellett az összegyűjtött pontok számát információként jelzi.

Extra ajándékpontok:
Időről időre egyes termékekkel további bónuszpontokat szerezhet. Arról, hogy melyik termékkel hány ponthoz juthat, mindig a termék közelében található felirat szolgál tájékoztatásul.

Megszerzett pontjait a számítógép rögzíti. Gyarapodó pontjait pedig a katalógusban található ajándékokra válthatja.

Nyeremények: 35 pont: desszert tányér, 40 pont: lapos/mély nagytányér, 120 pont: női esernyő, 420 pont: fix fókuszos fényképezőgép, FUJI Clear Shot Plus E, 1060 pont: hordozható rádiós CD, THOMSON, 1530 pont: porszívó, SIEMENS VS50A20, 2560 pont: hordozható rádiómagnó, TM 9700, 3420 pont: Színes TV, THOMPSON 20DG10, 5880 pont: DVD lejátszó, DTH 4200

Feladatok:

1. A következő vásárlási „módszerek" alapján számítsuk ki, 1 pontot hány forintért szerezhetünk meg! Az adott módszerekkel mennyi ideig tart a felsorolt ajándékok megszerzése?

a) A „taktikás" módszer. Havonta kétszer, mindig hétfőn vásárolunk, mindig 15 001 Ft-ért.
b) A „felületes" módszer. A hónap minden hétfőjén vásárolunk 15 001 Ft-ért (Az egyszerűség kedvéért 28 napos hónappal számolunk)
c) A „türelmetlen" módszer. Mivel 15 001-ért már maximális pontot kapunk, nem érdemes ennél nagyobb összegért vásárolni. Vásároljunk viszont ennyiért a hónap minden napján.
d) A „laza" módszer. A hónap minden napján vásárolunk, de csak 1001 Ft-ért. (csak 5 ponttal kapunk többet, ha 15 001 Ft-ot hagyunk ott...)

2. Próbálj az előbbinél hatékonyabb módszert megadni, ha lehet.
3. Te milyen pontszerzési akciót szerveznél? Dolgozd ki a részleteket, és indokold elképzelésedet!

4. ábra

3. Modell

Mivel az A érték még mindig magas, tovább kell növelni az egy autó által elfoglalt helyet (eddig: biztonsági távolság + járműhosszúság). Egy lehetőségként kínálkozik az ún. reagálási másodperc, amely alatt a jármű még az eredeti sebességével halad, és a fékezés nem kezdődött meg (ezalatt $s=v\cdot 1=v$ méter utat tesz meg).

Ennek figyelembevételével az áthaladó autók száma a következőképpen alakul:

$$A=v/(v^2/(2a)+s+v)\cdot 3600$$

A értékének „maximálásával" éppen az előbbivel megegyező $v(opt)\,|\,25km/h$ adódik, ám az óránként áthaladó autók száma jelentősen lecsökkent, $A=1400$. Ez már az előbbinél jóval valószínűbb érték, és hihető is, így ez a modell tűnik a legjobbnak.

Megjegyzés: Az optimális sebesség független az építési szakasz hosszától.

A továbbiakban tovább finomítható a modell, a „paraméterek" (járműhossz, lassulás) változtatásával. Például kidolgozható optimális sebesség különböző járművek, időjárási viszonyok, stb esetére.

4.2. Gyakorlatorientált feladatok újságcikk, reklám felhasználásával

A következő példák részben módszertani szemináriumokon, részben szakdolgozat keretében készültek (3. és 4. ábra).

5. Befejező gondolatok

Manapság szinte divat kérkedni azzal, hogy „rosszak voltunk matematikából". (Olyan emberrel még nem találkoztam, aki ugyanilyen élvezettel ecsetelte volna pl. földrajz vagy történelem tárgyakban vallott kudarcait.) Az idegen nyelvekkel nehezen megbirkózók sem igazán büszkék „teljesítményükre". Még matematikamódszertani konferenciákat megnyitó neves személyiségek sem riadnak vissza attól, hogy amennyiben nem szakmabeliek, ne elevenítsék fel némely megrázó élményüket a középiskolai matematikaórákról. Nem tudom elképzelhető-e, hogy egy zenei fesztivál megnyitóján a szónok a botfülével, és a zene iránt érzett negatív érzéseivel kérkedjen?

De miért divat a matekot lenézni? Kézenfekvő a „savanyú a szőlő" megoldás, de véleményem szerint a dolog nem ilyen egyszerű. Valljuk be, az iskolai matematika sokak számára még ma is életidegen, annyi jószándékú, és jólrosszul elképzelt, illetve végrehajtott reform után is. Ennek az érzésnek a leküzdésében segíthetnek valamit a gyakorlatorientált feladatok.

Azok, akik valódi vagy ahhoz közeli problémákkal találkoztak az iskolában, valószínűleg onnan kikerülve sem riadnak majd vissza valamilyen gyakorlati helyzet megoldásától, még akkor sem, ha éppen egy kicsit számolni kell hozzá...

Irodalom

[1] Humenberger J.-Reichel H. Ch.: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik BI Wissenschaftverlag, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich 1995.

[2] Comenius: Didactica Magna, Akadémia Kiadó, 1953 (szerk.: Geréb György)

[3] Lehmann, J.: Zum 500. Geburtstag des Rechenmeisters Adam Ries (1492-1559), Praxis der Mathematik, 1992/3.

[4] Beke M.-Mikola S.: A középiskolai Matematikai Tanítás reformja, Franklin Társulat Bizománya, Budapest, 1909.

[5] Szekeres Györgyné: Újságcikkek és reklámok a matematikaórán, Szakdolgozat, 2000. ELTE TFK

[6] De Lange, J.: Using and Applying Mathematics in Education, In: Kluwer Academic Publishers, 1996., 49.-97.o.

[7] Rényi, A.: Dialógusok a matematikáról, Akadémiai K., 1966.

[8] Barrow, J.D.: Warum die Welt so mathematisch ist? Deutscher Taschenbuchverlag, München, 1996.

valamint a cikkben említett tankönyvek, példatárak és tantervek.

Peller József

Ismerkedés a matematikai szakmódszertannal

A matematikaoktatás problémakörének sok ága-boga van, a maga teljességében nem ragadható meg. Ezért vizsgálata különböző irányokból, eltérő szempontrendszerek szerint folyik. A kutatások, kísérletek eredményei alapján a szakmódszertani képzés többféle módon tervezhető meg.

Igen ám, de a sokféleségből nem könnyű feladat igényes képzési anyag összeállítása, a feldolgozás módjának kialakítása. Tudja ezt minden olyan szakmódszertanos, aki ennek kínját-keservét átélte. Mennyivel könnyebb a matematika valamely területének logikailag finoman összecsiszolt ismeretrendszerét előadni, vagy változatos feladatokkal foglalkozni. Jól tudom, hiszen másfél évtizeden át analízis tárgyakat, vagy ezeket is oktattam. Az egyetemen a matematikai szakmódszertan előadójaként, gyakorlatvezetőjeként szembesültem azzal a problémával, hogy miként lehet a tanárjelöltek elé tárni a matematika-oktatás szövevényét úgy, hogy egyfelől az elvek, az általános módszertani eljárások, a matematika ismeretek, másfelől a tanításban fontos részletek, sőt mozzanatok között ne tátongjon űr? Hogyan lehet az elmélet „semmitmondását", ill. az empirikusságot elkerülni? (A hallgatók ebben az időben párhuzamosan a relativitáselmélet mélységével foglalkoznak.) Mi a módja annak, hogy a különböző tárgyakban megszerzett – matematikai, ismeretelméleti, pszichológiai, pedagógiai – ismeretekből a szaktanári munkához kiválasztott, rendezett, szerves ismeretrendszer alakuljon ki?

Itt szakítsuk meg a felvethető kérdések sorozatát. Kezdjük meg a problémakör megoldását. Ebben a cikkben az első három szakmódszertani gyakorlatot írjuk le. A probléma megoldásának egyik konkrét módját mutatjuk be. Persze lehet, hogy az olvasó kollégák a következőkből csak a szándékkal értenek egyet, a megvalósítás konkrét módjával nem. Erre a maguk gyakorlatában jobb megoldást alakítottak ki. Jó lenne ha ezt cikkbe foglalnák. Az értékek közvetítésére, az eszmecserére égetően szükség van.

Az új tanítványokkal való első találkozásnak van valamiféle varázslatos feszültsége. Az oktató a hallgatók várakozó figyelmének fókuszába kerül. Az arcokról leolvasható: ki vagy, mit tudsz, mit vársz tőlünk? Ezért természetes, hogy kölcsönös ismerkedésre kerül sor.

Bemutatkozom, néhány mondatban szólok tevékenységemről. Elég bő készletem van olyan esetekből, amikor már jól ismert fogalmakról hirtelen kiderül, hogy igazából nem értem. (A tankönyvekben is számos ilyet találtam.) Ezekből néhány példát mondok, így a szakmódszertannal való foglalkozásomat is indoklom. Az analízis oktatójaként előadás közben rádöbbentem, hogy a differenciálhányados fogalmát mélységében nem értem. Logikailag értem ugyan, de nem sajátom. Később a törtek tanításában több problémára leltem. (A tört különböző alakjai?!)

Példáim a hallgatók kételkedő mosolyát váltják ki. Kérdéseimmel megingatom magabiztosságukat.

Ezután a hallgatók mutatkoznak be. Néhány információt rögzítek. Melyik iskolában érettségizett? Matematikatanára. Diák korában ismerte-e a KÖMAL-t? A matematika melyik területe érdekli? Végzés után milyen pályára kíván lépni?

Igyekszem jó hangulatot kelteni. Mindig adódik olyan szituáció, amely mosolyt vált ki, sőt a nevetés is felcsendül.

Ezután tájékoztatom a hallgatókat a gyakorlatok programjáról, munkamódszeréről, a követelményekről. Néhány év után ezt későbbre halasztottam. A tájékoztató ugyanis lehűtötte a jó hangulatot, az információs zuhatag bénítólag hatott. Rájöttem arra, hogy előbb a szakmódszertan tartalmát és módszerét érdemes a hallgatók előtt fokozatosan feltárni mégpedig úgy, hogy ebben ők is aktívan vegyenek részt.

Ezért az első három gyakorlatot teljesen átalakítottam. Első lépésként kérdésekből, feladatokból álló sorozatot készítettem, amely első közelítésben és implicit módon tájékoztatta a hallgatókat a szakmódszertan összetevőiről. Ezt az „információs dolgozatot" a hallgatók név nélkül adták be. Előre jeleztem, hogy több kérdés, feladat gondot okozhat, teljesítményekből semmiféle következtetést ne vonjanak le. Az alább közölt információs dolgozat kérdéseit egyenként tettem fel, amelyre a hallgatók nyomban a római és arab számjegy mellé csak a válaszukat írták. (Természetesen a közlés tempójára gondosan ügyeltem.)

I. Oktatástörténet

1. Mikor alapították egyetemünket?
2. Mióta van az egyetemünkön Természettudományi Kar?
3. Mit tud Beke Manóról, tevékenységéről?
4. Ki volt Piaget?
5. Hallotta-e ezt a nevet: Bourbaki?

II. Matematikatörténet

1. Ismerte-e Euler a differenciálegyenletet?
2. Ismerte-e Euler a függvény határértékének fogalmát?
3. Kinek a nevéhez fűződik a logaritmus fogalmának kialakítása?
4. Mi a logaritmus kifejezés nyelvi jelentése?
5. Mit jelent a reciprok kifejezés?

III. Fogalmak (definíciók)

1. Prímszám
2. Szög
3. Racionális szám

IV. Bizonyítások

1. A középkorban a szorzat kiszámítására különböző módszereket találtak ki. Ezek egyike, ha mindkét szám 5-nél nem kisebb, és 10-nél nem nagyobb, akkor a következő módon jártak el. Az egyik kézen az egyik számnál 5-tel kevesebb ujjat nyitottak ki, a másik kézen ugyanígy a másik számnál 5-tel kevesebb ujjat mutattak. Összeadták a két kézen nyitott ujjak számát, s azt mondták, hogy a szorzat ennyi tízes. Ehhez még hozzáadták a becsukott ujjak számának a szorzatát, mint egyeseket. Igazolja, hogy így mindig jó eredményt kapunk.
2. Igazolja, hogy ha $x \to f'(x) > 0$ az (a,b) nyílt intervallumon, akkor ezen az $x \to f(x)$ függvény szigorúan monoton nő.
3. Legyen az $x \to f(x)$ függvény az [a,b] zárt intervallumon korlátos. Képezzük az egyenlő részekre való felosztáshoz tartozó alsó, felső összegek $n \to s_n$ és $n \to S_n$ sorozatát.
4. Mi a véleménye az integrálhatóság következő definíciójáról:
A függvény az [a,b]-n integrálható, ha
a) létezik $\lim s_n$ és létezik $\lim S_n$
b) $\lim s_n = \lim S_n$ két feltétel egyaránt teljesül?

V. Szakmódszertani feladatok

1. Tanulóknak indokolja meg a $(-2) \cdot (-15) = (+30)$ egyenlőséget.
2. Készítse el az $x \to \frac{1}{x+2}$ függvény grafikonját!
3. Rajzoljon téglalapot! Rajzoljon kört!

Az információs dolgozat megbeszélésére a következő gyakorlaton kerül sor. A hallgatók teljesítménye érdektelen, az azonban már elgondolkodtató, hogy két évtized alatt változat-

lan maradt. Ez a főiskolát végzett – középiskolai tanári diplomát adó – hároméves kiegészítő tagozatos hallgatókra is vonatkozik, hat éven át szerzett tapasztalatok szerint.

A Természettudományi Kar létesítését általában egy évszázaddal korábbinak gondolják, a XIX. század közepére teszik. Az oktatástörténet három utolsó kérdésének az a célja, hogy a matematikaoktatás két reformmozgalma szóba kerüljön. Számomra meglepő, hogy a XX. század legnagyobb hatású pszichológusának, Piagetnek a nevét kevesen ismerik. (Piaget fejlődéslélektani rendszerét a szakmódszertani képzés szerves részének tekintem.)

A II./1. és II./2. „beugrató" kérdés. Az elsőre az igen, a másodikra a nem a helyes válasz. Ennek kapcsán a hallgatók figyelme a mozgás rejtélyének matematikai megoldására irányítható. Zénón, Eudokszosz, Arkhimédész, Kepler, Napier, Descartes, Newton, Cauchy, Weierstrass szellemi teljesítményének nyomvonalán követhetjük végig. (Néha akadt vállalkozó.)

A logaritmus kifejezést Napier a görög viszony és szám szavakból alkotta meg, jelentése viszonyszám. A reciprok szó jelentése kölcsönös. A matematikai tartalmat jól fejezi ki. (Két szám egymás reciproka, ha a szorzatuk 1.)

Az olvasó bizonyára komolytalannak tekinti, hogy a negyedéves hallgatóktól ilyen egyszerű definíciókat kérdezünk.

Az először hallott primszám definíció azonban az egyetemi képzést is makacsul túléli. (Olyan szám, amely egyen és önmagán kívül mással nem osztható.) Volt egy időszak, amikor ez a hibás definíció az oktatási gyakorlatból kikopott, de már ismét virágzik. Az elmúlt év szeptemberében háromszáz főiskolai gólya mindegyike ezt a definíciót tartotta jónak. (A fertőző források egyikét ismerem.)

A hallgatók a szögnek csak a sztatikus értelmezésére gondolnak. Mennyi a konvex ötszög belső szögeinek összege kérdésre kapják csak fel a fejüket. A középkori szorzás módját igazolják. Kevés kivételtől eltekintve a 2. állítást Lagrange tétele nélkül „igazolják". A helyi növekedés fogalmát nem ismerik, legalábbis feledésbe merült, a monoton növekedéssel azonosítják. A 3. kérdésre indoklás nélkül igenlő választ adnak. A főiskolát végzett hallgatók közül néhányan az V/1 feladatot permanencia elv alkalmazásával mutatják meg. A többiek teljesen tanácstalanok. A két utolsó kérdés a megszokás helyes értelmezésére világít rá. A megadott függvény grafikonját nem tudjuk elkészíteni, csak annak egy darabját, amely már a függvény lényeges tulajdonságait kifejezi, képzeletünkkel teljessé tehető. Erről azonban időnként a tanulóknak is szólnia kell. „Rajzolj egyenest!" Egyenest nem tudunk rajzolni, helyette szakaszt rajzolunk, és arra az egyenesre gondolunk, amely erre a szakaszra illeszkedik. A matematikában a képzeletnek fontos funkciója van, nélkülözhetetlen. „Rajzolj téglalapot!" A téglalap keretét rajzoljuk meg, de arra a síkdarabra kell gondolnunk, amely a keretből és az általa bezárt részből áll.

Otthonra két didaktikai feladatot tűzünk ki. Mindenkitől ezek egyikének megoldását várjuk el.

1. Az elsőosztályos tanulók füzetében még karácsony előtt a következőt látjuk: 5+2=7. Elemezze, hogy ez a teljesítmény milyen tudás megnyilatkozása! Hogyan alakulhatott ki ez? Keresse meg a gyökereket!

2. A IV/3 – középiskolai definíció – igenlésének indoklása. A két feladat a szakmódszertan széles sávját fogja közre.

Az első gyakorlatot a „Mi és ők az órán" című negyedórás, színes videofilm megtekintésével zárjuk. Az ELTE Oktatástechnikai Csoportja 1983-ban vezető tanárok óráiról két kamerával felvételeket készített. A szóban forgó film 15 felvételből a tanulók, a tanárok viselkedésére jel-

lemző, hangulatos jelentek kiválogatásával, szerkesztésével készült. A film nagyon hatásos, különösen akkor, ha a gyakorlatvezető a jeleneteket kommentálja. Természetesen a filmet látni kell, leírással nem pótolható. A jelenetek egy részére mégis utalunk.

(Osztálykép. Copfos kislány forgatja a fejét. Őzike várja a becsengetést... A figyelem, a feszültség, a tevékenység képsorai... Ámuló arc. Hogy mik vannak! ... Csak lendületesen... Kabala... Heuréka! ...A nevetés végig hömpölyög az osztályon... Faggatás... Nehéz a gondolatokat kifejezni... Áh! ... Holtponti helyzet... Adó és erősítő működés közben... A zseni... Huncut arc, amely a tanárnő közeledtére komolyra, majd visszavált. Tükröm, tükröm ki a legszebb a világon... Muszáj nyújtózkodni, ... Nem bírom ki ásítás nélkül.)

A második gyakorlatot, amint már erről írtunk, az információs dolgozat megbeszélésével kezdjük. Ezután az otthoni munkára kitűzött feladatokkal foglalkozunk.

1. Az $5 + 2 = 7$ elemzésével a hallgatók nem jutnak el a gyökerekig, de értékes megállapításokat tesznek. Ennek kapcsán vizsgálat tárgyává tesszük, hogy a matematikaoktatás feltételei miként alakulnak ki a kisgyermek általános ismeretszerzése során. Időnként a hallgatók – különösen a lányok – megfigyelése, élménye színesíti a feltárást. Zömük elcsodálkozik azon, hogy ez az egyszerű jelenség tartalmában enynyire gazdag.

2. A Riemann integrálhatóság egyetemi feldolgozásának ismeretében a középiskolai definíció nagyon soványnak tűnik. Ha az intervallum összes felosztásához tartozó alsó, illetve felső összegek halmazát így jelöljük $\{s\}$, ill. $\{S\}$, akkor az egyetemi feldolgozásból adódik, hogy minden korlátos függvény esetében $\lim s_n = \sup \{s\}$, ill. $\lim S_n = \inf \{S\}$.

Ez azt jelenti, hogy az első feltétel eleve teljesül, matematikailag felesleges. A második teljesülése pedig $\lim s_n = \lim S_n = \sup \{s\} = \inf \{S\}$ éppen a Riemann integrálhatóság egyik definíciójának felel meg. A hallgatók közül elvétve akadt olyan, aki ezt a feladatot választotta. Még az első gyakorlaton a hallgatók mindegyike egy példányt kapott – az első félévben feldolgozandó – alapvető, elsődleges matematikai fogalmak, ismeretek kialakításának témaköreiről. Ezekből mindenkinek egyet kellett otthon kiválasztania.

A témakörök jegyzéke:

1. Mennyiség mint a számokkal kapcsolatos elsődleges ismeretek forrása. A diszkrét, ill. folytonos mennyiség jellemzői.
2. Bennfoglaló osztás, maradékos osztás, oszthatóság.
3. Többszörös képzés, részképzés, a tört fogalmának kialakítása.
4. Tájékozódás a törtek rengetegében. A törtek tanításának szakaszai.
5. Az egész szám fogalmának kialakítása. Műveletek értelmezése, modellek.
6. A racionális szám fogalmának kialakítása. Halmazának tulajdonságai.
7. Kombinatorika kezdete különböző témakörökben. Tanításának szakaszai.
8. A valószínűség intuitív fogalmától a matematikai fogalmáig.
9. A valós számfogalom kialakításának módjai.
10. A geometria – az alakzatok – tanításának kezdete. A téglalap származékai.
11. A szög sztatikus, ill. dinamikus fogalma.
12. Méretes geometria, mennyiségek algebrája, polinomok.
13. A helymeghatározás módjai, koordinátarendszerek. Térfogalmak az iskolai tananyagban.

14. A merev test két egyszerű mozgásából származtatott matematikai fogalmak.
15. A tér síkra vonatkozó tükrözése. Az egybevágóság fogalmának szintjei.
16. A hasonlóság tanításának szintjei.
17. Összefüggések felismerése, jellemzésük. Az arányosság típusai.
18. A dinamikus függvényszemlélet kialakításának módjai. Modellek.
19. Összefüggésektől a függvényekig.
20. A függvények elemi vizsgálata.
21. Közelítés módszere, mint az analízis fogalmainak forrása.
22. Relációk a tananyagban.
23. Szimbólumok, jelek szerepe a gondolkodás fejlesztésében.
24. Modellek az ismeretszerzésben, váltásuk szükségessége.
25. Állítások szerkezete. A matematikai és a logikai nyelv.
26. Matematikaoktatás a tantárgyak rendszerében.
27. Pszichológia alkalmazása a matematikaoktatásban.
28. A bizonyítási igény felkeltésének, fejlesztésének módjai.

Rögzítem a hallgatók által választott témaköröket és megállapodom velük a feldolgozás sorrendjében. Legalább a negyedik és ötödik gyakorlaton sorra kerülő 5-6 témakört kijelöljük. A harmadik gyakorlaton két, nem választott témakör feldolgozását magam mutatom be. Az előkészítésbe a hallgatókat is bevonom. Kérem, hogy mindegyikük a füzetébe írja le mindazt, ami a témakör kapcsán eszébe jut. Ne zavarjon senkit sem az, hogy gondolatai csapongóak. Mintegy tíz perc után megbeszéljük a leírtakat, a hiányokat pótolva rendezzük ezeket. A témakör feldolgozásának a módja olyan, hogy az az oktatási gyakorlatban közvetlenül hasznosítható, ha nem is egészben, de a legfontosabb lépések esetében feltétlenül. Nem hallgatom el azokat a részleteket, amelyek fejtörést okoztak, vagy amelyekre még jobb megoldást kellene találni. Arra törekszem, hogy a hallgatók a didaktikai megoldásrendszer kialakítását velem együtt átéljék.

Fitos László

A parabola mely pontokból látszik ugyanakkora szögben

I. Először azt a kérdést vetjük fel, hogy **a parabola a síkjának mely pontjaiból látszik 90°-os szögben.**

Hogy a megoldás minden parabolára érvényes legyen, a feladatot általánosságban oldjuk meg. Legyen a parabola egyenlete $y = ax^2$, amelyben a tetszőleges pozitív valós szám, továbbá a keresett mértani hely egy tetszőleges pontja $P(u; v)$. A P pontból a parabolához húzott érintők (e_1 és e_2) irányszöge α, ill β *(lásd az 1. ábrát)*. Az érintők egyenlete: $y - v = m(x - u)$. Ebből és a parabola egyenletéből y-t kiküszöbölve kapjuk: $ax^2 = mx - mu + v$, azaz

$$ax^2 - mx + mu - v = 0$$

Bármelyik érintő és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszernek csak **egy** megoldása van, mert csak **egy** közös pontjuk van, ezért az (1) alatti másodfokú egyenletnek csak **egy** valós gyöke lehet.

Ennek az a feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsának nullával kell egyenlőnek lenni, tehát:

$$m^2 - 4a(mu - v) = 0, \text{ vagyis}$$
$$m^2 - 4aum + 4av = 0.$$
Ebből $m_{1,2} = 2au \pm \sqrt{4a^2u^2 - 4av}$

Tehát az e_1 és az e_2 érintő iránytangense

$$m_1 = 2au + \sqrt{4a^2u^2 - 4av} \text{ és}$$

$$m_2 = 2au - \sqrt{4a^2u^2 - 4av}$$

Mivel azonban e_1 merőleges e_2-re, ezért

$$m_1m_2 = -1 \text{ és így}$$
$$4a^2u^2 - 4a^2u^2 + 4av = 4av = -1$$

De $a = \frac{1}{2p}$, amelyben p a parabola paramétere, ezért

$$4av = \frac{4v}{2p} = \frac{2v}{p} = -1$$

Ebből $v = -\frac{p}{2}$, ami azt jelenti, hogy a mértani hely minden pontjának az ordinátája $-\frac{p}{2}$, vagyis a mértani hely a parabola vezéregyenese. Ennek alapján igaz a következő tétel: Bármely parabola a vezéregyenesének minden pontjából és csakis azokból 90°-os szögben látszik.

II. Ezután azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy **a parabola a síkjának mely pontjaiból látszik ugyanakkora hegyesszögben.**

Az előbbi esethez képest csak az a változás, hogy most a keresett mértani hely bármely $P(u; v)$ pontjából a parabolához húzott érintők hajlásszöge nem 90°, hanem egy adott φ hegyesszög, azaz $\alpha - \beta = \varphi$

Mindkét oldal tangensét véve (hogy előálljanak az érintők iránytangensei)

$$\frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b} = \operatorname{tg}j \text{, vagyis } \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \operatorname{tg}j$$

Behelyettesítve m_1 és m_2-nek az előbbi esetben kapott kifejezését, a

$$\frac{2\sqrt{4a^2u^2 - 4av}}{1 + 4av} = \operatorname{tg}j \text{ egyenlethez jutunk.}$$

Ezután négyzetreemeléssel el kell távolítanunk a gyökjelet. Ennél a lépésnél figyelembe kell venni azt, hogy a jobboldal ($\operatorname{tg}\varphi$) négyzete megegyezik $-\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(180° - \varphi)$ négyzetével. Ezért a négyzetreemeléssel kapott egyenlet már nemcsak azon pontok mértani helye, amelyekből a parabola φ hegyesszögben látszik, hanem azon pontokéi is, amelyekből $180° - \varphi$ tompaszögben látszik.

Négyzetreemeléssel és az egyszerűség kedvéért $\operatorname{tg}\varphi$ helyébe „t"-t helyettesítve, kapjuk:

$$16a^2u^2 - 16av = t^2(1 + 8av + 16a^2v^2), \text{ azaz}$$
$$16t^2a^2v^2 + (8t^2a + 16a)v -$$
$$- 16a^2u^2 + t^2 = 0 \qquad /:16t^2a^2$$
$$v^2 + \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{at^2}\right)v - \frac{u^2}{t^2} + \frac{1}{16a^2} = 0$$

Teljes négyzetté kiegészítéssel:

$$\left[v + \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{2at^2}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{2at^2}\right)^2 -$$
$$- \frac{u^2}{t^2} + \frac{1}{16a^2} = 0,$$

azaz

$$\left(v + \frac{t^2 + 2}{4at^2}\right)^2 - \frac{u^2}{t^2} = \frac{1}{4a^2t^4} +$$
$$+ \frac{1}{4a^2t^2} = \frac{t^2 + 1}{4a^2t^4}$$

$\frac{t^2 + 1}{4a^2t^4}$ -nel osztva

$$\frac{\left(v + \frac{t^2 + 2}{4at^2}\right)^2}{\frac{t^2 + 1}{4a^2t^4}} - \frac{u^2}{\frac{t^2 + 1}{4a^2t^2}} = 1$$

Végül az u és v változókról áttérve az x és y változókra, a keresett mértani hely egyenlete:

$$\frac{\left(y+\frac{t^2+2}{4at^2}\right)^2}{\frac{t^2+1}{4a^2t^4}}-\frac{x^2}{\frac{t^2+1}{4a^2t^4}}=1,$$

amelyben $t = \operatorname{tg}\varphi$ és $a=\frac{1}{2p}$.

Tehát a mértani hely egy hiperbola, melynek középpontja

$$K\left(0;-\frac{t^2+2}{4at^2}\right)$$

Valós tengelye az y tengelyre illeszkedik, képzetes tengelye pedig az

$$y=-\frac{t^2+2}{4at^2}$$ egyenletű egyenesre.

Eután még lássunk néhány konkrét esetet!

1. Ha $a=\frac{1}{4}$, azaz p=2 és $\varphi = 45°$, vagyis $t = \operatorname{tg}45° = 1$, akkor a parabola egyenlete $y=\frac{x^2}{4}$ és a mértani hely egyenlete:

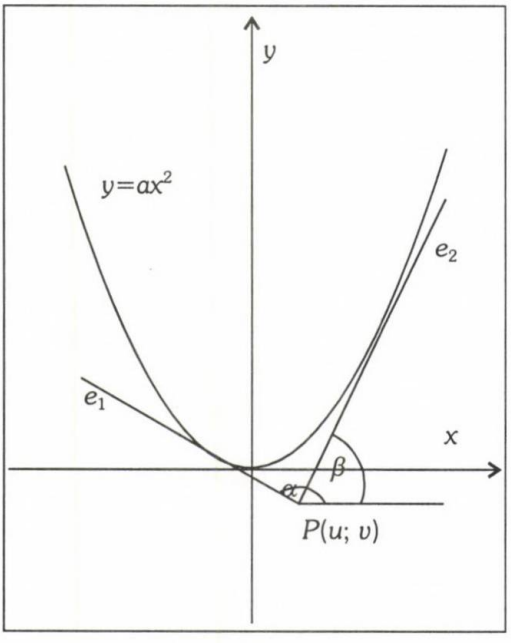
$$\frac{(y+3)^2}{8}-\frac{x^2}{8}=1$$

(lásd a 2. ábrát)

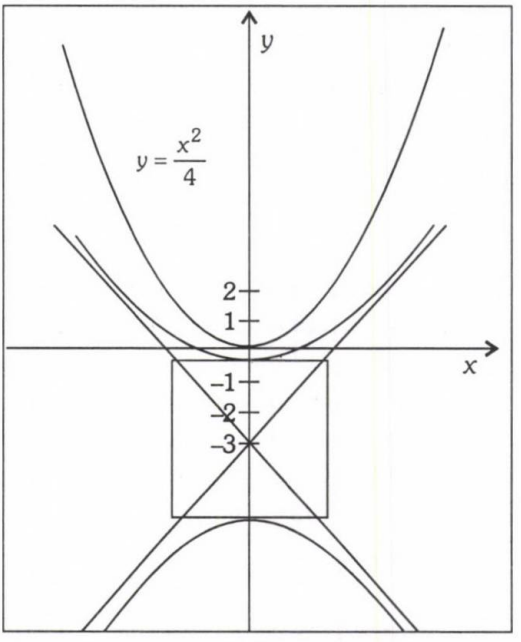
2. (Ha $a=\frac{1}{4}$, azaz $p = 2$ és $\varphi = 60°$, vagyis $t = \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$, akkor a mértani hely egyenlete:

$$9\left(y+\frac{5}{3}\right)^2-3x^2=16$$

A kapott eredmények összefoglalása: Bármely parabola 90 °-os szögben a vezéregyenesének pontjaiból látszik, továbbá ugyanakkora φ hegyesszögben egy hiperbola távolabbi ágának a pontjaiból látszik, és egyúttal a hiperbola közelebbi ágának pontjaiból 180 °– φ tompaszögben látszik.



1. ábra



2. ábra

HÍREK VERSENYEKRŐL

A tanárképző főiskolások 2001. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

1. Egy kocka három páronként kitérő élén vegyünk föl egy-egy pontot. Az így kapott háromszögek közül hány olyan van, amelynek súlypontja a kocka középpontja?

2. Jelölje a_n a Pascal-háromszög n-edik sorában álló elemek reciprokainak összegét ($n = 0,1,2,\ldots$). Konvergens-e az (a_n) sorozat és ha igen, mi a határértéke?

3. A valós számok halmazán értelmezett f függvényre fennáll, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2} f(x).$$

Igazoljuk, hogy f periodikus függvény!

4. Az a, b, c pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} < 1.$$

5. Legyenek adottak az a, b, c pozitív valós számok és az $n > 1$ egész szám úgy, hogy

$$a^n + b^n = c^n$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ha $1 \leq k < n$ egész, akkor az a^k, b^k, c^k hosszúságú oldalakkal szerkeszthető háromszög! Mely k-ra lesz az így kapott háromszög derékszögű, hegyesszögű és tompaszögű?

6. Egységélű kockát merőlegesen vetítünk egy síkra. Határozzuk meg a vetület területének maximumát!

7. Az ABC háromszöget ($AC \neq BC$) úgy helyezzük el a derékszögű koordinátarendszerben, hogy az AB oldal felezőpontja legyen az origó, és a C csúcshoz tartozó (belső) szögfelező egyenes párhuzamos legyen valamelyik tengellyel. Igazoljuk, hogy az a hiperbola, amely illeszkedik az A csúcsra és asszimptotái a tengelyek, tartalmazza a B és C csúcsot is!

A XXX. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5-8. osztály)

5. osztály

1. Hány különböző alakú téglalapot lehet összeállítani 72 darab egyforma (egybevágó) négyzetlapból, ha egy-egy téglalaphoz mindegyik négyzetlapot fel kell használni?

2. Andi, Cili és Gabi testvérek. Andi kétszer olyan idős, mint Gabi lesz akkor, amikor Cili annyi idős lesz, mint Andi most. Ki a legidősebb, ki a középső, és ki a legfiatalabb a testvérek közül?

3. Egy parkolóban 25 autó állt. Háromszor annyi Suzuki volt ott, mint Opel, és kétszer annyi Volkswagen, mint Fiat. Tudjuk, hogy a parkolóban álló Opelek nem voltak egyforma színűek. Melyik autóból hány parkolt ott?

4. Adva van az $ABCD$ négyzet (az oldala 2 cm). Keressük meg azokat a P pontokat a négyzet síkjában, amelyekre a következő négy háromszög mindegyike egyenlő szárú: ABP, BCP, CDP, DAP!

Az 5. osztály feladatainak megoldása

1. A 72 számot a következő módon lehet kéttényezős szorzatokra bontani:

$72 = 1 \cdot 72 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$

Ennek megfelelően a 72 darab négyzetlapból 6 féle különböző oldalú téglalapot lehet kirakni.

2. Például így lehet indokolni: Andi a legidősebb, hiszen idősebb Gabinál és Cilinél is. Amikor Cili annyi idős lesz, mint Andi most, akkor Gabi életkora csak fele ennek, tehát Gabi és Cili közül Gabi a legfiatalabb.

A legidősebb tehát Andi, Cili a középső, és Gabi a legfiatalabb.

3. Jelöljük a parkolóban álló Opelek számát O-val, ekkor tudjuk, hogy a Szuzukik együttes száma $3O$, az Opelek és a Szuzukik együttes száma tehát $4O$.

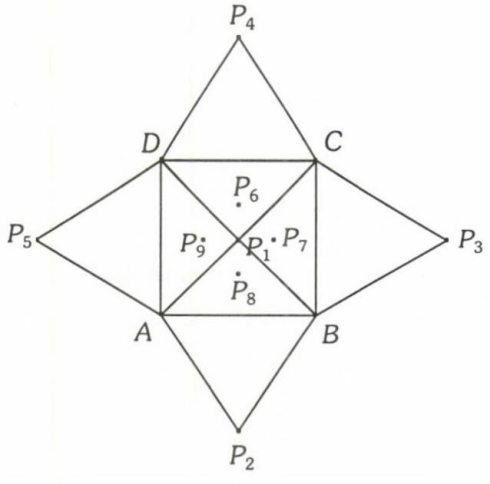
Ha a Fiatok száma f, akkor a Volkswagenek száma $2f$, tehát összegük $3f$. Így $4O + 3f = 25$.

Tudjuk még, hogy az Opelek száma legalább 2, tehát O lehet 2, 3, 4, 5, 6, mert $7 \cdot 4 = 28$ már több, mint 25.

A megfelelő esetekben az f értékére csak akkor kapunk egész számot, ha $O = 4$, ekkor $f = 3$.

A parkolóban tehát 4 Opel, 12 Szuzuki, 6 Volkswagen és 3 Fiat állt.

4. Összesen 9 ilyen pont van. A négyzet P_1 középpontja és a négy oldalra kifelé szerkesztett szabályos (egyenlő oldalú) háromszögek négyzetcsúcstól különböző P_2, P_3, P_4, P_5 csúcspontjai, továbbá ezeknek a megfelelő oldalakra vonatkozó P_6, P_7, P_8, P_9 tükörképei.



6. osztály

1. Mutassuk meg, hogy 111111 osztható 111-gyel! Mennyi a hányados? Osztható-e egy 30 darab csupa 1-es számjegyből álló tízes számrendszerbeli szám 111-gyel?

2. Van egy kétszáz forintos papír pénzünk, és fel akarjuk váltani 10, 20 és 50 forintos fém pénzekre (lehet például 20 darab 10-esre is). Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

3. Az $ABCD$ négyzet CD oldalának felezőpontja E, a négyzetet tükrözzük az AE egyenesre. A B, C és D pontok tükörképét sorra jelölje B_1, C_1 és D_1. Tudjuk, hogy AB hossza 2 egység. Számítsuk ki az $ABCEC_1B_1$ hatszög területét!

4. Van 30 darab külsőre egyforma ezüst érménk, de tudjuk, hogy valamelyik hamis, az egy kicsit könnyebb a többinél. Rendelkezésünkre áll egy kétserpenyős mérleg (bármelyik tányérjára ráfér mind a 30 érme), súlyok nélkül. Hogyan lehet minél kevesebb méréssel megállapítani, melyik a hamis érme?

A 6. osztály feladatainak megoldása

1. Mivel $111 \cdot 1001 = 111111$, a 111 osztója 111111-nek, és a hányados 1001. Teljesen hasonlóan adódik, hogy az A szám, ami 30 db 1-es számjeggyel írható le, osztható 111-gyel, mert a 111-et egy olyan számmal szorozva kapjuk az A számot, amelyet az 100 számjegycsoportot 9-szer egymás után írva, majd a végére egy 1-est írva kapunk.

2. A feladat megoldható közvetlenül úgy is, hogy módszeresen felírjuk, majd összeszámoljuk az összes felváltási lehetőséget.

Célszerű például az 50-esek csökkenő száma szerint rendezni ezeket, ezen belül a húszasok csökkenő száma szerint.

50 Ft-os	20 Ft-os	10 Ft-os
4	0	0
3	2	1
3	1	3
3	0	5
2	5	0
2	4	2
2	3	4
2	2	6
2	1	8

2	0	10
1	7	1
1	6	3
1	5	5
1	4	7
1	3	9
1	2	11
1	1	13
1	0	15

50 Ft-os	20 Ft-os	10 Ft-os
0	10	0
0	9	2
0	8	4
0	7	6
0	6	8
0	5	10
0	4	12
0	3	14
0	2	16
0	1	18
0	0	20

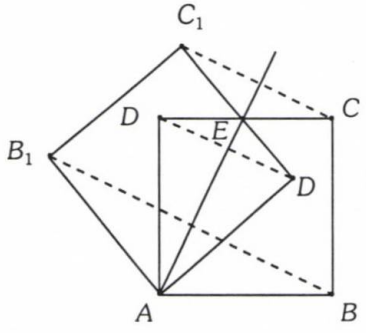
Összesen: $1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$ lehetőség.

3. Mivel az ábra szimmetrikus az *AE* egyenesre, a hatszög területe kétszerese az *ABCE* négyszög területének.

Az *ABCD* négyszög területe 4 cm^2.

Így az *ABCE* négyszög területe $4 - 1 = 3$ cm^2.

A hatszög területe tehát $2 \cdot 3 = 6$ cm^2.



4. Arra törekszünk, hogy amikor csak lehet, három azonos számú érmét tartalmazó csoportot alakítsunk ki. Ezekről egy méréssel eldönthető, hogy melyikben van könnyebb, hiszen ha egy-egy érmecsoportot a mérleg egy-egy oldalára teszünk, akkor egyensúly esetén a harmadik csoportban van a könnyebb. Ha nincs egyensúly, akkor abban a csoportban van a könnyebb érme, amelyiknek a tányérja felfelé billen.

Az **első** méréskor 3 db tízes csoportba osztjuk az érméket, így az előbb leírt módon meg tudjuk állapítani, melyik tízes csoportban van a hamis.

A **második** méréshez ezt a tízet két hármas, és egy négyes csoportra osztjuk. A két hármas csoportot a mérleg két oldalára téve kiderül, hogy egyensúly van-e ekkor a 4 között van a hamis, vagy melyik hármas csoport könnyebb – ekkor abban van a hamis.

A **harmadik** méréshez három egyes, vagy két egyes és egy kettes csoportot alakítunk ki (ha a négy között van a hamis). Ekkor a két egyest a két oldalra feltéve vagy azonnal kiderül, hogy melyik a hamis, vagy ha egyensúly van, akkor a maradék 1 érme hamis, illetve a maradék 2 között van a hamis. Csak az utóbbi esetben van szükség negyedik mérésre, amiből kiderül, hogy a két érme közül melyik könnyebb.

A feladat tehát 4 méréssel mindig megoldható.

7. osztály

1. Egy elsárgult papíron egy régi matematika feladat olvasható: „A 1234.. hatjegyű tízes számrendszerbeli szám osztható 4-gyel, és 9-cel." A két pont helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Mi állhatott itt?

2. Melyek azok a háromjegyű tízes számrendszerbeli számok, amelyek egyenlőek számjegyeik összegének 34-szeresével?

3. Egy három egység oldalú szabályos háromszöget a középpontjára tükrözünk. Számítsuk ki az eredeti és a tükörkép háromszög közös részét alkotó hatszög kerületét!

4. Egy hajó a tavon a parttal párhuzamosan halad, gyorsabban, mint ahogy mi a parton sétálunk. Ha a hajó elejével egy vonalban vagyunk, és elindulunk a hajóval egyirányban, akkor 200 lépésünk után a hajó teljes hosszával elhalad mellettünk. Ha a hajó elejével egyvonalban vagyunk, és a hajóval ellenkező irányban sétálunk, akkor már 40 lépés után a hajó végével leszünk egy vonalban. Hány lépés a hajó hossza? (A lépéseink hossza és ideje mindkét esetben ugyanakkora)

5. Van négy darab egybevágó egységnyi oldalú szabályos hatszög alakú lapunk. Ezekből hézag és átfedés nélkül egy 2 egység oldalú szabályos hatszöglapot kell összeállítani úgy, hogy minél kevesebb vágásra legyen szükség. Hogyan lehet a nagyobb hatszöget összeállítani? Hány lapot kell szétvágni? Mekkora lesz a vágások együttes hossza?

A 7. osztály feladatainak megoldása

1. Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel. A látható számjegyek összege 10, így a két nem látható számjegy összege vagy 8, vagy 17 lehet, hiszen két számjegy összege legfeljebb 18.

17 csak a 8+9 összeg lehet, de egy 98-ra végződő szám nem osztható 4-gyel, mert 4-gyel azok a számok oszthatóak, amelyeknek utolsó két jegyéből alkotott szám osztható 4-gyel.

Ennek következtében a következő számjegyek állhatnak a pontok helyén: 08, 44, 80, mert csak ezek a számok oszthatók 4-gyel.

2. Jelölje a háromjegyű szám számjegyeit x, y és z, a szám tehát $100x + 10y + z$ alakú ($x \neq 0$). A feltétel szerint

$$100x + 10y + z = 34(x + y + z),$$

amiből $66x = 24y + 33z$

következik. Osszuk el mindkét oldalt 3-mal: $22x = 8y + 11z$.

Mivel a bal oldal osztható 11-gyel, és a jobb oldali kifejezés második tagja is, ezért $8y$ is osztható 11-gyel, de $(8, 11) = 1$, ezért 11 osztója y-nak. Mivel y számjegy, csak $y = 0$ lehet.

Így ezt kapjuk: $2x = z$.

A szóba jöhető számok tehát:

$102 = 3 \cdot 34$

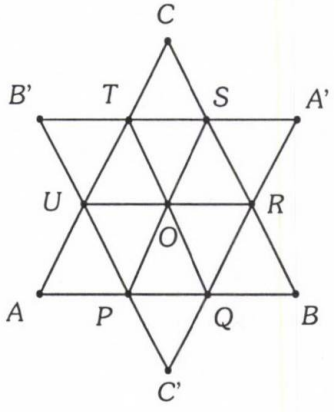
$204 = 6 \cdot 34$

$306 = 9 \cdot 34$

$408 = 12 \cdot 34$

amik megfelelnek a feltételnek.

3. A kapott csillaghatszög tengelyesen szimmetrikus az AA' tengelyre, ezért APU egyenlőszárú háromszög. Az A csúcsnál 60°-os szög van, ezért szabályos háromszög is.



Az alakzat a PS tengelyre is szimmetrikus, ezért az APU és $C'QP$ szabályos háromszögek egybevágóak. Ugyanígy egybevágó az összes „kis" háromszög, ami „kilóg" a $PQRSTV$ hatszögből.

A P és Q pontok tehát harmadolják az AB oldalt, $PQ = 1$ cm, ugyanennyi a hatszög többi oldala is, tehát a hatszög kerülete 6 cm.

4. Jelölje x lépés a hajó hosszát. Ha a hajóval egyirányban haladunk, akkor a hajó a 200 lépés ideje alatt $200 + x$ lépés távolságot tesz meg.

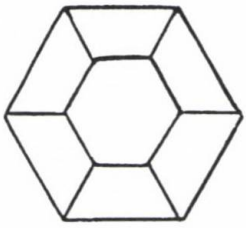
Ha a hajóval ellenkező irányban haladunk, akkor a hajó 40 lépés ideje alatt $x - 40$ lépés hosszat tesz meg.

Ez az idő ötöd része a 200 lépés időnek, tehát $200 + x = 5x - 200$.

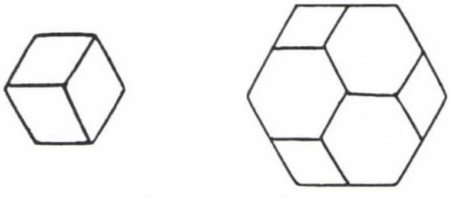
Ebből $200 + x = 5(x - 40)$,

tehát $x = 100$ lépés a hajó hossza.

5. Egy lehetséges megoldást úgy kapunk, ha 3 hatszög lapot vágunk szét egy-egy szimmetria tengelye mentén, és az ábrán látható módon összerakjuk a darabokat az épen maradt hatszöggel. A vágások összhossza 6 cm.



A másik lehetséges megoldás, hogy egy hatszöget vágunk szét három egybevágó rombuszra.



Ekkor a vágások összhossza 3 cm. A kapott darabokat a 3 ép hatszöggel a következő ábrán látható módon tudjuk összerakni a kívánt hatszöget.

8. osztály

1. A 0-nál nagyobb és 1-nél kisebb racionális számokat egy sorozatba rendezzük úgy, hogy a kisebb nevezőjű törtek állnak előbb a sorozatban, és az azonos nevezőjű törtek a számlálóik növekvő sorrendjében követik egymást. Ha az összes említett, különböző alakú (nem egyszerűsített) törtet így felsoroljuk (a sorozatban így azonos értékű törtek is szerepelnek, pl: $\frac{1}{2}\ldots\frac{2}{4}\ldots\frac{5}{10}\ldots$ stb.), hányadik helyén áll a $\frac{2000}{2001}$ tört?

2. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$\frac{x-1999}{2}+\frac{x-1998}{3}+\frac{x-1997}{4}=\frac{x-2}{1999}+\frac{x-3}{1998}+\frac{x-4}{1997}.$$

3. Egy derékszögű háromszög hegyesszögeinek aránya 5:1, az átfogója 4 egység. Számítsuk ki a háromszög területét!

4. Melyik az a három legkisebb egymást követő pozitív egész szám, amelyek összege egy egész szám négyzete, ugyanakkor egy másik egész szám köbe (harmadik hatványa is)?

5. Egy tompaszögű egyenlő szárú háromszög két belső szögfelezője közül a hosszabbik kétszerese a rövidebbiknek. Mekkorák a háromszög szögei?

A 8. osztály feladatainak megoldása

1. Írjuk fel a feladatban szereplő sorozat első néhány elemét:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\ldots$$

a sorozatban az $1 < n$ nevezőjű, 1-nél kisebb törtek nagysága szerint követik egymást, és ezekből éppen $n - 1$ van, hiszen a legnagyobb számlálója $n - 1$.

Ennek alapján a $\frac{2000}{2001}$ tört a 2001-dik csoport utolsó tagja, tehát az $1+2+3+\ldots+2000=\frac{2001\cdot 2000}{2}$ = 2001000-dik tag a sorozatban.

2. Az adott egyenlet első fokú, és $x = 2001$ kielégíti az egyenletet. Mivel a nevezőben nem szerepel az ismeretlen, ekkor vagy minden szám gyöke az egyenletnek, vagy csak egy gyöke van.

Az $x = 0$ nem elégíti ki az egyenletet, hiszen a bal oldal abszolút értéke 1-nél nagyobb, a jobb oldal abszolút értéke 1-nél kisebb. Az egyenlet egyetlen gyöke az $x = 2001$.

Az egyenletet szokásos „számolással" is meg

lehet oldani. Rendezzük az egyenletet a következő módon:

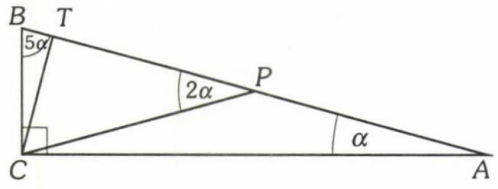
$$x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1997}\right)=$$
$$\frac{1999}{2}-\frac{2}{1999}+\frac{1998}{3}-\frac{3}{1998}+\frac{1997}{4}-\frac{4}{1997}.$$

A következő átalakítást érdemes elvégezni:

$$x\left(\frac{1999-2}{2\cdot 1999}+\frac{1998-3}{3\cdot 1998}+\frac{1997-4}{4\cdot 1997}\right)=$$
$$\frac{1999^2-2^2}{2\cdot 1999}+\frac{1998^2-3^2}{3\cdot 1998}+\frac{1997^2-4^2}{4\cdot 1997}.$$

A jobb oldalon (felhasználva az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot) a (számlálóból) 2001 kiemelhető, és ekkor a bal oldalon x szorzója, a jobb oldalon 2001 szorzója ugyanaz a 0-tól különböző szám. Tehát az egyenlet gyöke $x = 2001$.

3. A feltétel szerint az ABC háromszög két hegyesszöge α és 5α. Ezek összege 90°, tehát $6\alpha = 90°$, így $\alpha = 15°$.



Kössük össze az AB átfogó felezéspontját a C derékszögű csúccsal, és húzzuk meg a CT átfogóhoz tartozó magasságot.

Thalesz tétele alapján $PC = PB = PA = 2$ egység, és a PCA egyenlő szárú háromszög P-nél levő külső szöge $2\alpha = 30°$.

A PCT derékszögű háromszög hegyesszögei tehát 30° és 60°, így CT rövidebb befogója fele a CP átfogónak, azaz $CT = 1$ egység.

Az ABC háromszög területe tehát

$\frac{4\cdot 1}{2} = 2$ területegység.

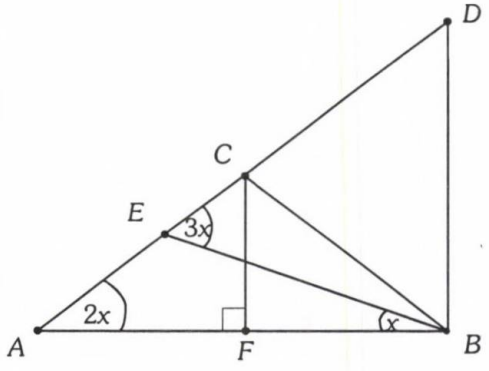
4. Legyen a három egymást követő pozitív egész szám $x-1$, x és $x+1$. A feltétel szerint ezek összege négyzetszám is, meg köbszám is, de akkor egy egész szám, például y hatodik hatványa: $x-1+x+x+1=y^6$.

Így a következőket kaptuk: $3x = y^6$.

A bal oldal osztható 3-mal, tehát a jobb oldal is, de akkor $3 \mid y$. Mivel a legkisebb ilyen tulajdonságú számhármast keressük, $y = 3$ megfelelő, és ez a legkisebb.

Így $x = 3^5 = 243$, tehát a keresett számhármas: 242, 243, 244.

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsánál van a tompaszög. Jelöljük a hegyesszögét $2x$-szel. Húzzuk meg a B és C csúcsból induló szögfelezőket, a feltétel szerint $2CF = BE$. Húzzunk párhuzamost FC-vel a B csúcson át az AC félegyenessel való D metszéspontig. Mivel CF súlyvonal is, felezi az AB szakaszt. Az ABD és AFC háromszögek hasonlók, a megfelelő oldalak aránya 2:1, tehát $BD = 2CF = BE$ a feltétel szerint.



Az ABE háromszög E csúcshoz csatlakozó külső szöge $3x$, az ADB szög pedig, ami egyenlő az ACF szöggel, $90° - 2x$.

Az EBD háromszög egyenlőszárú, ezért $3x = 90° - 2x$, tehát

$5x = 90°$,

$x = 18°$.

Az ABC háromszög szögei: 36°, 36°, 108°.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 2001. augusztus 31.**

175. Van 68 darab páronként különböző tömegű érménk. Ki lehet-e választani közülük a legnehezebbet és a legkönnyebbet egy kétkarú mérleg segítségével, ha legfeljebb 100 mérésre van lehetőségünk?

176. Tekintsük az első n darab pozitív egész szám halmazának összes nem üres részhalmazát. Minden egyes részhalmaz esetén számítsuk ki a részhalmazba tartozó számok reciprokának szorzatát. Határozzuk meg ezen szorzatok összegét!

177. Legyenek x, y, z olyan nem negatív valós számok, amelyekre

$$x^4 + y^4 + z^4 \le 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right)$$

Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2(xy + yz + zx)$$

egyenlőtlenség is teljesül! Igaz-e az állítás megfordítása?

178. Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja, és jelölje rendre x, y és z a P pontnak a BC, AC és AB oldalegyenesektől vett távolságát. A háromszög belsejének mely P pontjára lesz az xyz szorzat maximális?

179. Egy egész együtthatós legalább elsőfokú polinomnak gyöke az 1 és a 2. Igaz-e, hogy van a polinomnak olyan együtthatója, amelyik kisebb – 1-nél?

Feladatmegoldások (160-163. feladatok)

160. Egy egyenes mentén elhelyeztünk n darab golyót, amelyek mindegyike vagy piros vagy kék színű az alábbi feltételek szerint:

(1) van piros is és van kék is a golyók között;

(2) bármely két golyó, amelyek között pontosan 10 vagy 15 golyó van, azonos színű.

Határozzuk meg n maximális értékét!

Városok Viadala, 1982.

Megoldás: n maximális értéke 25.

Először belátjuk, hogy 25 golyó esetén egyidejűleg teljesíthető az (1) és a (2) feltétel. Sorszámozzuk meg a golyókat balról jobbra haladva, és legyen a 11-es golyó piros. (Ez semmiféle megszorítást nem jelent.) Ekkor (2) miatt pirosak a következő sorszámú golyók: 22, 6, 17, 1, 12, 23, 7, 18, 2, 13, 24, 8, 19, 3, 14, 25, 19, 20, 4, 15. Ekkor a kék golyók sorszáma: 5, 10, 16, 21. Könnyen látható, hogy ez a színezési konstrukció megfelel mindkét feltételnek.

Ha a fenti 25 golyóhoz hozzávesszük a 26. golyót, neki pirosnak kell lennie, mert a 15-ös golyó piros. Viszont ekkor pirosnak kellene lennie a 10-es, a 21-es, az 5-ös és a 16-os golyónak is, azaz mindegyiknek, ami ellentmond az

(1) feltételnek.

Kiss Géza (Kisújszállás), Schuler László (Budapest) és Simon József (Csíkszereda) megoldása alapján

A megoldók száma: 3.

161. Az ABC háromszögben az A, B, C csúcsokkal szemben lévő oldalakhoz hozzáírt körök rendre k_1, k_2, k_3. A BC egyenes a k_1, k_2, k_3 köröket rendre az A_1, A_2, A_3 pontokban érinti. Hasonlóképpen kapjuk az AC egyenesen a B_1, B_2, B_3, az AB egyenesen pedig a C_1, C_2, C_3 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1C_1}{A_1B_1}\cdot\frac{B_2A_2}{B_2C_2}\cdot\frac{C_3B_3}{C_3A_3}=1!$$

Bíró Bálint, Eger

Megoldás: Legyen $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, és jelölje a háromszög kerületének felét s. A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján érvényesek a következők *(1. ábra)*.

$$AC_1 = AB_1 = BA_2 = BC_2 = CA_3 = CB_3 = s$$

$$BA_3 = BC_3 = CA_2 = CB_2 = s-a,$$
$$AB_3 = AC_3 = CB_1 = CA_1 = s-b,$$
$$AB_2 = AC_2 = BA_1 = BC_1 = s-c.$$

Ezek alapján az eredeti háromszög egyes csúcsainál keletkező egyenlő szárú háromszögek hasonlók, azaz

$$AB_3C_3D \sim AB_2C_2D,$$
$$BC_1A_1D \sim BC_3A_3D,$$
$$CA_1B_1D \sim CA_2B_2D.$$

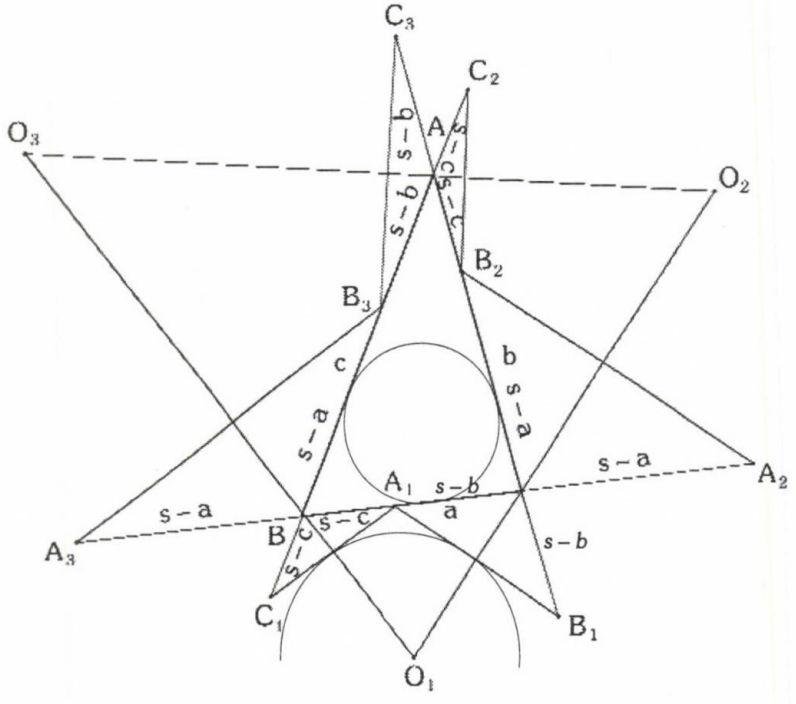
Ezen hasonlóságok alapján

$$\frac{C_3B_3}{B_2C_2}=\frac{s-b}{s-c}\quad\frac{A_1C_1}{C_3A_3}=\frac{s-c}{s-a}\quad\frac{B_2A_2}{A_1B_1}=\frac{s-a}{s-b}$$

E három egyenlőség jobb oldalainak szorzata 1, ezért a bal oldalak szorzata is 1. Ezzel az állítást beláttuk.

Fitos László, Esztergom

A megoldók száma: 9.



1 ábra

162. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén

$$\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+5}+\ldots+\frac{n}{3n+1}\le\frac{n}{4}$$

Tamás Sándor, Csíkszentgyörgy

I. megoldás: Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összeg helyett vizsgáljuk annak kétszeresét. Ennek bármelyik tagját felírhatjuk

$$\frac{2k}{n+1+2k}=\frac{n+1+2k-(n+1)}{n+1+2k}=1-(n+1)\cdot\frac{1}{n+1+2k}$$

alakban, ahol $k=1, 2, \ldots, n$. Így ezen tagok összege

$$\frac{2}{n+3}+\frac{4}{n+5}+\ldots+\frac{2n}{3n+1}=n-(n+1)\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+5}+\ldots+\frac{1}{3n+1}\right)$$

A zárójeles összeget becsüljük meg alulról a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenséggel:

$$\frac{\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+5}+\ldots+\frac{1}{3n+1}}{n}\ge\frac{n}{(n+3)+(n+5)+\ldots+(3n+1)}=$$

$$=\frac{n}{n\cdot\frac{n+3+3n+1}{2}}=\frac{1}{2(n+1)}.$$

Itt egyenlőség csak $n=1$ esetén lehet.

A fentieket felhasználva (1) jobb oldala felülről becsülhető:

$$\frac{2}{n+3}+\frac{4}{n+5}+\ldots+\frac{2n}{3n+1}=n-(n+1)\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+5}+\ldots+\frac{1}{3n+1}\right)\le$$

$$\le n-(n+1)\cdot\frac{n}{2(n+1)}=\frac{n}{2}.$$

2-vel osztva az eredeti egyenlőtlenséget kapjuk.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely
Udvari Tibor, Baja

Megjegyzés: Az előbbiek mintájára bizonyítható az alábbi, általánosabb egyenlőtlenség is:

Ha a, b, c nem negatív valós számok úgy, hogy nem mindegyik 0, akkor

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{an+bk+c}\ge\frac{n(n+1)}{(2a+b)n+b+2c}.$$

Az $a=1$, $b=2$, $c=1$ esetén az imént belátott egyenlőtlenséget kapjuk.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

II. megoldás: Csoportosítsuk az egyenlőtlenség bal oldalán levő összeget szimmetrikusan, figyelembe véve n paritását.

(a) n páros. Ekkor

$$\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+3}+\ldots+\frac{n-1}{3n-1}+\frac{n}{3n+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+3}+\frac{n}{3n+1}\right)+\left(\frac{2}{n+5}+\frac{n-1}{3n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{\frac{n}{2}}{2n+1}+\frac{\frac{n}{2}+1}{2n+3}\right)$$

(b) n páratlan. Ekkor

$$\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+5}+\ldots+\frac{n-1}{3n-1}+\frac{n}{3n+1}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+3}+\frac{n}{3n+1}\right)+\left(\frac{2}{n+5}+\frac{n-1}{3n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{\frac{n-1}{2}}{2n}+\frac{\frac{n+3}{2}}{2n+4}\right)+\frac{\frac{n+1}{2}}{2n+2}$$

Legyen $1<k\le\left[\frac{n}{2}\right]$.

Belátjuk, hogy a csoportosítással kapott kéttagú

összegek mindegyike kisebb $\frac{1}{2}$-nél, azaz

$$\frac{k}{n+2k+1}+\frac{n-k+1}{3n-2k+3}<\frac{1}{2}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens módon az

$$(n-2k)^2+2(n+k)+1>0$$

alakra hozható, ez pedig mindig teljesül.

Az *(a)* esetben a csoportosított összeg $\frac{n}{2}$ tagú, így az eredeti egyenlőtlenség teljesül.

A *(b)* esetben $\frac{n-1}{2}$ tagú a csoportosított összeg, az utolsó tag pedig $\frac{1}{4}$, így ekkor is teljesül az eredeti egyenlőtlenség. Látható az is, hogy egyenlőség csak $n = 1$ esetén áll fenn.

László Sándor, Szombathely
Simon József, Csíkszereda

III. megoldás: Alakítsuk az egyenlőtlenség bal oldalán álló összeget.

$$\frac{1}{n+3}+\frac{2}{n+5}+\ldots+\frac{n}{3n+1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{n+1}}{1+2\cdot\frac{1}{n+1}}+\frac{\frac{2}{n+1}}{1+2\cdot\frac{2}{n+1}}+\ldots+\frac{\frac{n}{n+1}}{1+2\cdot\frac{n}{n+1}}$$

Ha n legalább 2, akkor a jobb oldalon álló összeg $\frac{1}{n+1}$-szerese az $f(x)=\frac{x}{1+2x}$ függvény intervallumon vett határozott integráljának egyenlő közű beosztásokkal vett alsó közelítő összege (Az f függvény a intervallumon folytonos, szigorúan növekvő és konkáv.), így felülről becsülhetünk az integrállal.

Előbb határozzuk meg az integrál értékét.

$$\int_0^1\frac{x}{1+2x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln 3$$

Meg kell mutatnunk, hogy

$$(n+1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln 3\right)<\frac{n}{4}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor érvényes, ha

$$n>\frac{\ln 3-1}{2-\ln 3}\approx 0{,}11$$

ami nyilvánvalóan teljesül. A bizonyításból kiderül az is, hogy $n \geq 2$ esetén az egyenlőtlenség éles, egyenlőség csak $n = 1$ esetén érvényes.

Kiss Géza, Kisújszállás

A megoldók száma: 8.

163. Egy háromszög oldalai a, b, c, a megfelelő oldalakkal szemközti szögei α, β, γ. Jelölje m_a, m_b, m_c a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságokat, f_α, f_β, f_γ pedig a megfelelő belső szögekhez tartozó szögfelezők háromszögbe eső szakaszát. Mutassuk meg, hogy

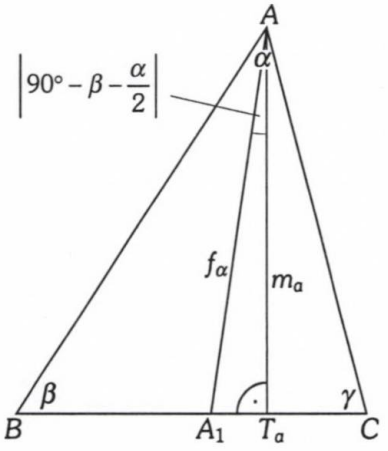
$$m_a^2f_b^2f_g^2+m_b^2f_g^2f_a^2+m_c^2f_a^2f_b^2=$$
$$=f_a^2f_b^2f_g^2+2m_am_bm_cf_af_bf_g$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Osszuk el a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát $f_\alpha^2f_\beta^2f_\gamma^2$-tel. Ezzel az állítás (egy ekvivalens lépést beiktatva) a következő alakot ölti:

$$\frac{m_a^2}{f_\alpha^2}+\frac{m_b^2}{f_\beta^2}+\frac{m_c^2}{f_\gamma^2}=1+2\cdot\frac{m_a}{f_\alpha}\cdot\frac{m_b}{f_\beta}\cdot\frac{m_c}{f_\gamma}$$

Ezután érdemes az állítást a háromszög szögeire vontkozó triginometrikus összefüggésé átírnunk. Ennek érdekében jelöljük az m_a magasság talppontját T_a-val, az A csúcsból induló belső szögfelező talppontját A_1-gyel. *(2. ábra)*



Az AA_1T_a derékszögű háromszögben $AA_1 = f_\alpha$, $AT_a = m_a$ és

$$T_aAA_1\angle = \left|90° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right| = \left|\frac{\gamma - \beta}{2}\right|$$

Így

$$\frac{m_a}{f_\alpha} = \cos\left|\frac{\gamma - \beta}{2}\right|$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\frac{m_b}{f_\beta} = \cos\left|\frac{\alpha - \gamma}{2}\right|, \quad \frac{m_c}{f_\gamma} = \cos\left|\frac{\beta - \alpha}{2}\right|$$

A bizonyítandó állítás szimmetriája miatt feltehetjük, hogy $\alpha \le \beta \le \gamma$. Ezután legyen

$$x = \left|\frac{\alpha - \beta}{2}\right| = \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad y = \left|\frac{\gamma - \beta}{2}\right| = \frac{\gamma - \beta}{2},$$

$$z = \left|\frac{\alpha - \gamma}{2}\right| = \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

A nagyságrend tisztázása után látható, hogy $z = x + y$.

Az eddig bevezetett jelölésekkel és összefüggésekkel a bizonyítandó állítás a következőképpen alakul:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 + 2\cos x \cos y \cos z$$

ahol $z = x + y$, valamint x, y és z hegyesszögek.

Alakítsuk a bizonyítandó állítás bal oldalát.

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z =$$
$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2(x+y) =$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y +$$
$$+\left(\cos^2 x \cos^2 y - 2\cos x \cos y \sin x \sin y + \sin^2 x \sin^2 y\right) =$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y +$$
$$+\left(\cos^2 x \cos^2 y - 2\cos x \cos y \sin x \sin y + \left(1 - \cos^2 x\right)\left(1 - \cos^2 y\right)\right) =$$
$$= 1 + 2\cos^2 x \cos^2 y - 2\cos x \cos y \sin x \sin y =$$
$$= 1 + 2\cos x \cos y(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 1 + 2\cos x \cos y \cos z$$

Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, így igazoltuk az állítást.

Kiss Géza, Kisújszállás
Simon József, Csíkszereda

A megoldók száma: 4.

A **164.** feladatra nem érkezett teljes megoldás, ezért újra kitűzzük, beküldési határideje megegyezik a most kitűzött feladatok beküldési határidejével.

164. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$y^k = x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)$$

egyenletet, ahol m pozitív egész, és $k \ge m + 1$! (A 145. feladat egy lehetséges általánosítása.)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

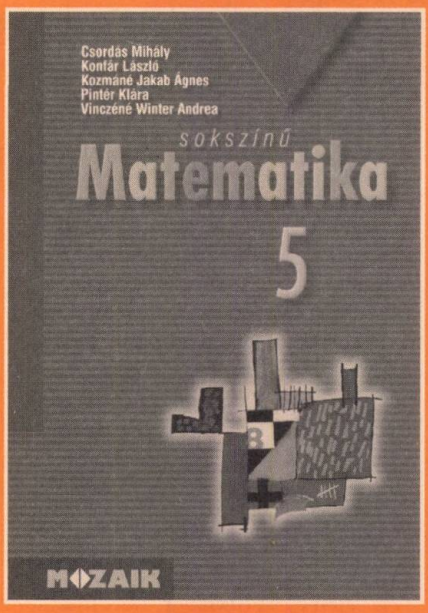
A megoldók névsora: Fitos László, Esztergom (161.); Horváth Géza, Zselíz (161., 162.); Kiss Géza, Kisújszállás (160-163.); László Sándor, Szombathely (161., 162.); Schuler László, Budapest (160-163.); Simon József, Csíkszereda (160-163.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (161-163.); Udvari Tibor, Baja (161., 162.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (161., 162.).

KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

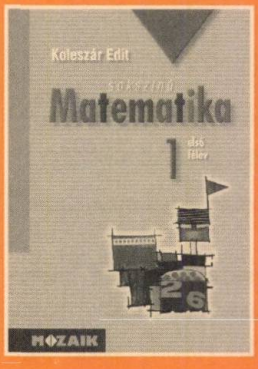
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

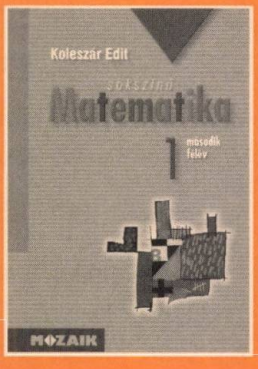
színes tankönyvsorozat 2001-ben az 1., 5. és 9. osztályos kötetekkel indul. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

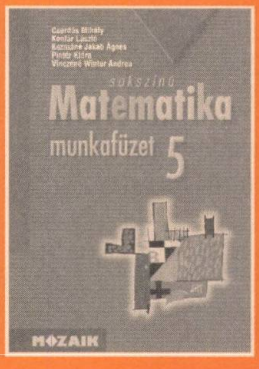


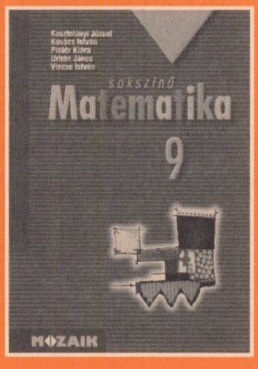
A kötetek szerzői: *1-4. osztály:* Koleszár Edit; *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A TANKÖNYVCSALÁD NÉHÁNY TOVÁBBI KÖTETE









MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

TERSEGHY KÖNYVTÁR
1/2

Szimultán háromszög-egyenlőtlenségekről II.

(Csete Lajos)

A háromszög szögfelezőinek hosszáról

(Dr. Darvasi Gyula)

A 2001. évi Beke Manó-emlékdíjasok

IX. ÉVFOLYAM 2001 4

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 554-666

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 980 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Generál Print Nyomda Kft.-ben

TARTALOM

Még egy bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Szimultán háromszög-egyenlőtlenségekről II.
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

A háromszög szögfelezőinek hosszáról
Dr. Darvasi Gyula docens, Nyíregyháza

Az általános talpponti háromszög körülírt és beírt körének sugara
Dr. Darvasi Gyula docens, Nyíregyháza

A 2001. évi Beke Manó-emlékdíjasok

HÍREK VERSENYEKRŐL

A XXX. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap

Beszámoló a 2001. évi GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről

Beszámoló a X. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

VERSEGHY SZOLNOK KÖNYVTÁR 2

Csete Lajos

Még egy bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség n = 3 esetére

Azt kell igazolnunk, hogy ha a, b és c tetszőleges pozitív valós számok, akkor teljesül, hogy

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad (1)$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

Hogy ne legyen köbgyök, ezért vezessük be az $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ jelöléseket, ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz \qquad (2)$$

Ez az egyenlőtlenség szimmetrikus az x, y, z-re. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 \leq x \leq y \leq z$. (3)

Legyen $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot xyz$, ekkor azt kell igazolnunk, hogy pozitív x, y, z esetén $f(x,y,z) \geq 0$ (4) és itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = z$.

Tekintsük az $f(tx,ty,tz)$ polinomot!

$$f(tx,ty,tz) =$$
$$= (tx)^3 + (ty)^3 + (tz)^3 - 3 \cdot (tx) \cdot (ty) \cdot (tz) =$$
$$= t^3 \cdot (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = t^3 \cdot f(x,y,z)$$

Azt kaptuk, hogy az f harmadfokú homogén polinom. Következésképpen $t > 0$ esetén az $f(x,y,z) > 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha $f(tx, ty, tz) > 0$ teljesül. (5)

Így elvégezhetjük a következő helyettesítést, amellyel normáljuk az egyenlőtlenséget. Válasszuk a t valós számot olyanra, hogy $tx = 1$, $ty = 1 + u$, $tz = 1 + v$ legyen, ekkor $f((tx,ty,tz) =$
$= 1^3 + (1+u)^3 + (1+v)^3 - 3 \cdot 1 \cdot (1+u) \cdot (1+v) =$
$= u^3 + v^3 + 3u^2 + 3v^2 - 3uv = u^3 + v^3 +$
$+ 2 \cdot (u^2 - 2 \cdot uv + v^2) + u^2 + uv + v^2 =$
$= u^3 + v^3 + 2 \cdot (u - v)^2 + u^2 + uv + v^2 > 0$ (6)

Ezen utóbbi egyenlőtlenség azért teljesül, mert az utolsó összeg minden tagja nemnegatív, hiszen $x \leq y \leq z$ és $t > 0$ miatt $tx \leq ty \leq tz$, azaz $1 \leq 1 + u \leq 1 + v$ is teljesül, és ebből azt kapjuk, hogy $0 \leq u \leq v$.

Ezzel beláttuk, hogy (6) fennáll, és itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $u = v = 0$, vagyis ha $tx = ty = tz$, azaz, ha $x = y = z$.

Az (5) észrevétel miatt (6) teljesüléséből következik, (4) fennállása, ez pedig a (2) egyenlőtlenség teljesülését is jelenti, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = z$. E (2) egyenlőtlenség fennállása pedig ekvivalens az (1) egyenlőtlenség teljesülésével, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$.

Ezzel igazoltuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség teljesülését $n = 3$ esetére.

A bizonyításban felhasznált módszer ismert, például Arthur Engel használja más egyenlőtlenségek igazolására kiváló könyvében: Problem-Solving Strategies, Pringer Verlag, New Yor-Heidelberg-Berlin, 1998. 163-164. old., 196. old.

A könyvet köszönettel kölcsönöztem Varga Ferencné könyvtárvezetőtől (Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet).

Csete Lajos

Szimultán háromszög-egyenlőtlenségekről II.

Ismert, hogy *a, b* és *c* hosszúságú oldalakkal akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, vagyis

$a + b > c$ (1), $b + c > a$ (2), $c + a > b$ (3)

Egy KöMaL feladatban (B.3394, megoldása KöMaL, 2001/3. 159. old.) és az [1] és [2] cikkekben szerepel a következő állítás bizonyítással:

A következő egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha az *a, b* és *c* hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4) \quad (4)$$

Murray S. Klamkin az Albertai Egyetem tanára egy általánosítási lehetőséget vizsgált [1] cikkében.

Tétele: **Ha az a_1, a_2..., a_n pozitív valós számokra ($n \geq 3$ egész szám) teljesül az**

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4) \quad (5)$$

egyenlőtlenség, akkor közülük bármely három a_i, a_j és a_k hosszúságú szakasszal szerkeszthető háromszög. *($i \neq j \neq k$, $1 \leq i, j, k \leq n$, $i, j, k \in N$)*

Magyarul is megjelent M. S. Klamkin bizonyítása [2], amelyben részletezve olvashatjuk az eredeti gondolatmenetét.

A továbbiakban kissé másképpen ismét igazoljuk a tételt. A tétel feltétele, hogy fennáll az

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4) \quad (5)$$

egyenlőtlenség az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra ($n \geq 3$ egész szám)

Legyen

$$S_2 = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 \text{ és } S_4 = a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_n^4,$$

ezeket felhasználva az előző egyenlőtlenséget a következő alakba írhatjuk:

$$(a_1^2 + S_2)^2 > (n-1)(a_1^4 + S_4)$$

$$\text{Így } a_1^4 + 2a_1^2 S_2 + S_2^2 > (n-1)(a_1^4 + S_4),$$

$$\text{azaz } 0 > (n-2)a_1^4 - 2a_1^2 S_2 - S_2^2 + (n-1)S_4$$

Ez a_1^2 -re nézve egy másodfokú egyenlőtlenség. Ezt korábban teljes négyzetre való kiegészítéssel vizsgáltuk. Talán egyszerűbb a bizonyítás, ha a diszkriminánst vizsgáljuk.

Mivel $(n-2)$ pozitív, és a_1^2 együtthatójának ellentettje, $2S_2 > 0$, ezért az egyenlőtlenségnek pontosan akkor van pozitív valós a_1^2 megoldása, ha a kifejezés diszkriminánsa pozitív.

$$(2S_2)^2 - 4(n-2)((n-1)S_4 - S_2^2) > 0$$

$$S_2^2 - (n-2)(n-1)S_4 + (n-2)S_2^2 > 0$$

$$(n-1)S_2^2 - (n-1)(n-2)S_4 > 0$$

$$S_2^2 - (n-2)S_4 > 0.$$

Vagyis

$$(a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)^2 > (n-2)(a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_n^4)$$

teljesül, ha a tétel (5) feltétele fennáll.

Ebből már teljes indukcióval következik M. S. Klamkin tétele. Ugyanis az ehhez hasonló lépések során megkaphatjuk, hogy bármely *i, j, k* indexre teljesül az

$$(a_i^2 + a_j^2 + a_k^2)^2 > 2(a_i^4 + a_j^4 + a_k^4)$$

egyenlőtlenség.

Ez utóbbi egyenlőtlenség éppen a (4) egyenlőtlenségnek felel meg. Ebből következik, hogy az a_i, a_j és a_k hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető. S mivel a_i, a_j és a_k tetszőleges szám volt az adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok közül, ezzel igazoltuk a tételt.

Persze ha szigorúak vagyunk, akkor megvalósíthatunk egy formális teljes indukciós eljárást. A változatosság kedvéért most nem használjuk az előbbi S-sel való rövidítéseket.

Vizsgáljuk az

$$\left(a_m^2 + a_{m+1}^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 > \\ > \left(n-(m+1)\right)\left(a_m^4 + a_{m+1}^4 + \ldots a_n^4\right) \qquad (6)$$

egyenlőtlenségeket, ahol az m lehetséges értékei $m = 0, 1, 2, \ldots, n-4, n-3$. (Ez egy véges teljes indukció lesz.)

Megállapodunk még abban, hogy $a_0 = 0$.

Az előbbi egyenlőtlenség $m = 0$ -ra teljesül, mert erre éppen megegyezik az (5) egyenlőtlenséggel, ami teljesül, hiszen ez Klamkin tételének feltétele.

Tegyük fel, hogy a (6) egyenlőtlenség m-re teljesül, vagyis az indukciós feltevésünk szerint

$$\left(a_m^2 + a_{m+1}^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 > \\ > \left(n-(m+1)\right)\left(a_m^4 + a_{m+1}^4 + \ldots a_n^4\right) \text{ fennáll.}$$

Azt kell igazolnunk, hogy $(m+1)$-re is teljesül, vagyis, hogy fennáll

$$\left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 \ldots + a_n^2\right)^2 > \\ > \left(n-(m+2)\right)\left(a_{m+1}^4 + a_{m+2}^4 \ldots a_n^4\right)$$

Az indukciós lépés ugyanúgy megy m-ről $(m+1)$-re, mint az előbb egyről kettőre.

A (6) egyenlőtlenség az indukciós feltevés miatt fennáll, és ebből következik a

$$0 > \left(n-(m+2)\right)a_m^4 - \\ - 2a_m^2\left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots + a_n^2\right) - \\ - \left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots a_n^2\right)^2 + \left(n-(m+1)\right) \\ \left(a_{m+1}^4 + a_{m+2}^4 + \ldots a_n^4\right)$$

egyenlőtlenség teljesülése.

Ez a_m^2 -re egy másodfokú egyenlőtlenség, belátható, hogy pontosan akkor van pozitív valós megoldása, ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa pozitív.

Vagyis

$$\left(2\left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots + a_n^2\right)\right)^2 - \\ - 4\left(n-(m+2)\right) - \left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots a_n^2\right)^2 + \\ + \left(n-(m+1)\right)\left(a_{m+1}^4 + a_{m+2}^4 + \ldots a_n^4\right) > 0.$$

Ebből

$$\left(n-(m+1)\right)\left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots a_n^2\right)^2 - \\ - \left(n-(m+1)\right)\left(n-(m+2)\right)\left(a_{m+1}^4 + a_{m+2}^4 + \ldots a_n^4\right).$$

Tehát

$$\left(a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots a_n^2\right)^2 > \\ > \left(n-(m+2)\right)\left(a_{m+1}^4 + a_{m+2}^4 + \ldots a_n^4\right).$$

Így a teljes indukció elve miatt tényleg következik a (6) egyenlőtlenség fennállása és így a (6) egyenlőtlenségbe $m = n-3$ -at helyettesítve megkapjuk, hogy teljesül a (4) egyenlőtlenség. Ebből pedig következik, hogy az adott szakaszok közül bármely háromból szerkeszthető háromszög. Ezzel ismét igazoltuk Klamkin tételét.

Klamkin [1] cikkében többek között megemlíti, hogy nyitott probléma olyan polinomegyenlőtlenség megadása, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy n darab adott szakasz közül bármely hármat kiválasztva háromszöget lehessen szerkeszteni belőlük.

Irodalom

[1] Klamkin, Murray S., Simultaneous Triangle Inequalities, Methematics Magazine, 60 (1987), No. 4. 236-237.

[2] Csete Lajos, Szimultán háromszög-egyenlőtlenségekről, KöMaL, 2000/9. (december), 540-542. old.

Dr. Darvasi Gyula

A háromszög szögfelezőinek hosszáról

A háromszöggeometria egyik alapvető ismerete a szögfelezőkre vonatkozó arányossági tétel, amely szerint bármely belső szögfelező a szöggel szemközti oldalt két olyan szakaszra bontja, amelyek aránya a szöget közrefogó két oldal arányával egyenlő.

Mindez az *1. ábra* jelöléseit használva például a C csúcsnál lévő belső szög felezőjére $p : q = a : b$ alakban írható fel, ahol

$$p = \frac{ac}{a+b},\quad q = \frac{bc}{a+b} \quad \text{és} \quad pq = \frac{abc^2}{(a+b)^2}. \tag{1}$$

A tétel bizonyítása közismert, itt nem is ezzel kívánunk foglalkozni, hanem e szögfelező hosszának az oldalakkal történő meghatározásával, ami egyúttal a 2001. május 21-én írt matematika érettségi-felvételi feladatsor nyolcadik kitűzött feladata volt. Célunk az, hogy erre a feladatra – a központilag megadottakon túl – további megoldásokat ismertessünk.

A feladat szövege a következő:

Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. Mutassa meg, hogy az a és b oldalak által közbezárt szögfelező hossza:

$$\frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}}{a+b}.$$

Erre a feladatra öt különböző bizonyítást adunk, amelyek többnyire csak a középiskolai matematika anyagára alapulnak, és mivel mindegyiknél szükségünk lesz a $\cos\frac{\gamma}{2}$-nek az oldalakkal történő kifejezésére, ezért elsőként most ezzel foglalkozunk. Ehhez egy cosinus tételből kiindulva jutunk el:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right) =$$

$$= (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

ahonnan

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}}. \tag{2}$$

Első bizonyítás (az *1. ábra* alapján)

Az ACP és BCP háromszögekre egy-egy sinus tételt felírva:

$$\frac{q}{f_c} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha} \Rightarrow q = f_c \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha}$$

$$\frac{c-q}{f_c} = \frac{p}{f_c} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta} \Rightarrow c - q = f_c\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}$$

a megfelelő oldalakat összeadva

$$c = f_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) =$$

$$= f_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{c}{a\sin\gamma} + \frac{c}{b\sin\gamma}\right) =$$

$$= \frac{c \cdot f_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{c \cdot f_c}{2\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{a+b}{ab},$$

ahonnan

$$f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}}{a+b}$$

Második bizonyítás (az *1. ábra* alapján)

A BCP és ACP háromszögekre egy-egy cosinus tételt felírva:

$$p^2 = a^2 + f_c^2 - 2af_c\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$q^2 = b^2 + f_c^2 - 2bf_c\cos\frac{\gamma}{2},$$

a megfelelő oldalakat elosztva és (1)-et felhasználva

$$\frac{a^2 + f_c^2 - 2af_c\cos\frac{\gamma}{2}}{b^2 + f_c^2 - 2bf_c\cos\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$a^2\left(b^2 + f_c^2 - 2bf_c\cos\frac{\gamma}{2}\right) = b^2\left(a + f_c^2 - 2af_c\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\left(a^2 - b^2\right)f_c^2 = 2ab(a-b)f_c\cos\frac{\gamma}{2},$$

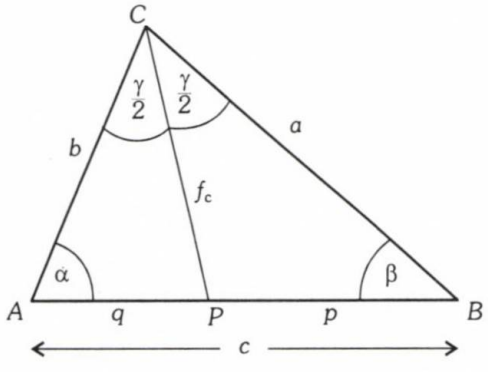
ahonnan $a \neq b$ esetén

$$f_c = \frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}}{a+b}.$$

Ha viszont $a = b$, akkor a bizonyítandó állítás

$$f_c = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2}$$

alakú, ami egyetlen Pitagorász-tétellel megkapható például az ACP derékszögű háromszögből.



1. ábra

Harmadik bizonyítás *(a 2. ábra alapján)*

A BCD egyenlőszárú háromszögből

$$BD = 2a\cos\frac{\gamma}{2},$$ majd $\overline{PC} \,||\, \overline{BD}$ miatt

$$\frac{PC}{BD} = \frac{AC}{AD},$$

ahonnan

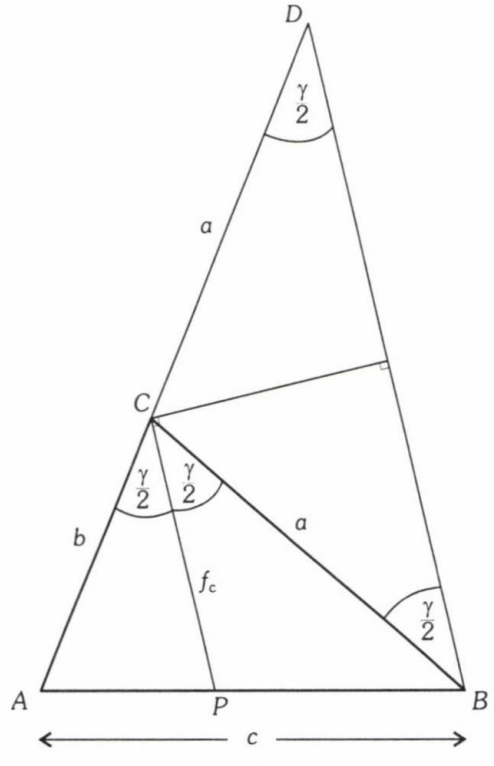
$$f_c = PC = \frac{AC\cdot BD}{AD} = \frac{b\cdot 2a\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

és így (2) alapján

$$f_c = \frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}}{a+b}.$$

Negyedik bizonyítás (a *3. ábra* alapján)

A $\vec{CP}$ félegyenes messe az ABC háromszög körülírt körét egy (C-től különböző) D pontban. Ekkor az azonos íveken nyugvó kerületi szögek egyenlősége miatt



2. ábra

$ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, $BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$,
$ADC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$ és $BDC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \alpha$

Ezért egyrészt az ABD háromszög egyenlőszárú és így

$$y = BD = \frac{c}{2\cos\frac{\gamma}{2}} = c\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}},$$

másrészt a BDP és CDB háromszögek hasonlók és így $\frac{DP}{BP} = \frac{BD}{BC}$, azaz

$$x = DP = \frac{BP \cdot BD}{BC} = \frac{\frac{ac}{a+b} \cdot c\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}}}{a} =$$
$$= \frac{c^2}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}}.$$

Ezekután az ADP és CBP háromszögek hasonlósága miatt $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$, ahonnan

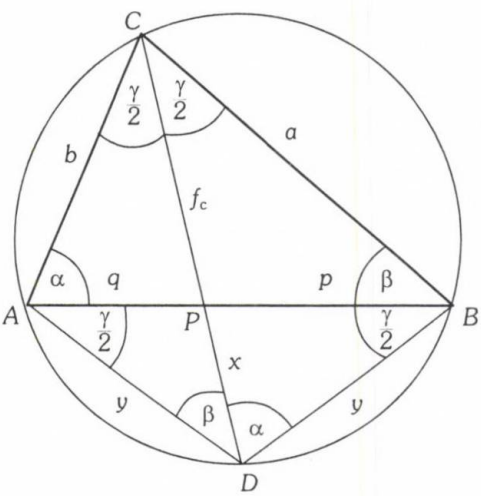
$$f_c = CP = \frac{AP \cdot BP}{DP} = \frac{\frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b}}{\frac{c^2}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}}} =$$

$$= \frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}}{a+b}$$

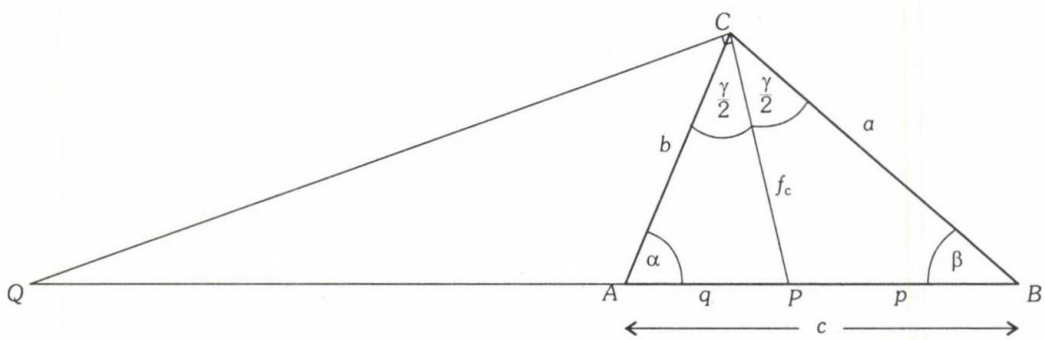
Ötödik bizonyítás (a *3. ábra* alapján)
Az $ADBC$ húrnégyszögre Ptolemaiosz-tételét felírva: $AB \cdot CD = AD \cdot BC + AC \cdot BD$, azaz, $c(f_c + x) = (a + b)y$, ahonnan az előző bizonyításbeli részeredmények alapján

$$f_c = \frac{(a+b)y}{c} - x =$$
$$= \frac{a+b}{c} \cdot c\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}} - \frac{c^2}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}} =$$
$$\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - c^2}} \cdot \left((a+b) - \frac{c^2}{a+b}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2 - c^2\right]}}{a+b}.$$

Mindezek után még három megjegyzést kívánunk tenni.



3. ábra



4. ábra

1. A kitűzött feladat bizonyítandó állításából (1) alapján

$$f_c\frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}}{a+b}=\sqrt{ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}}=$$

$$=\sqrt{ab-pq}\quad \text{kapható.}$$

2. Ha $a>b$ esetén a C-nél lévő külső szög felezője az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenest egy Q pontban metszi *(4. ábra)*, akkor a külső szögfelezőre vonatkozó arányossági tétel miatt

$$AQ=\frac{bc}{a-b},\quad \textit{és ezért}$$

$$PQ=PA+AQ=\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a-b}=\frac{2abc}{a^2-b^2}.$$

Így a $\overline{CQ}$ szakasz hossza a CPQ derékszögű háromszögből Pitagorász-tétellel meghatározható:

$$CQ=\frac{\sqrt{ab\left[c^2-(a-b)^2\right]}}{a-b}.$$

3. A háromszög belső szögfelezőire vonatkozó arányossági tétel speciális esete a következő tételnek:

Ha P az ABC háromszög $\overline{AB}$ oldalának tetszőleges belső pontja, akkor

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AC\cdot\sin ACP\sphericalangle}{BC\cdot\sin BCP\sphericalangle}.$$

Ugyanis az ACP és BCP háromszögekre egy-egy sinus tételt alkalmazva

$$\frac{AP}{AC}=\frac{\sin ACP\sphericalangle}{\sin APC\sphericalangle}\quad\text{és}\quad\frac{BP}{BC}=\frac{\sin BCP\sphericalangle}{\sin BPC\sphericalangle},$$

ahonnan $\sin APC\sphericalangle=\sin BPC\sphericalangle$ miatt a bizonyítandó állítás adódik.

Dr. Darvasi Gyula

Az általános talpponti háromszög körülírt és beírt körének sugara

Ha egy adott ABC háromszög síkjában lévő, de annak $k(O;R)$ körülírt körére nem illeszkedő valamely P pontból merőlegeseket állítunk a $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ egyenesekre, akkor az így kapott A_1, B_1, C_1 nem kollineáris talppontok az ABC háromszög P pontra vonatkozó általános talpponti háromszögének csúcsai *(1. ábra)*. Ezen $A_1B_1C_1$ háromszög oldalainak és területének meghatározása [1] alapján már ismert:

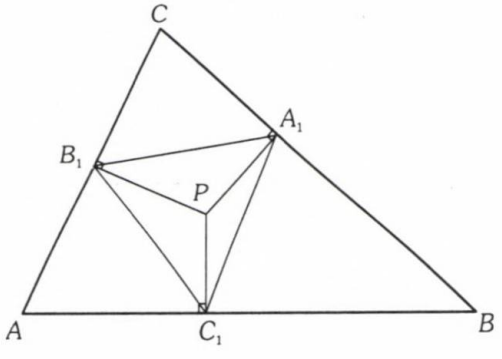
$$A_1B_1=\frac{c\cdot CP}{2R},\quad B_1C_1=\frac{a\cdot AP}{2R},\quad C_1A_1=\frac{b\cdot BP}{2R}$$

$$\textit{és}\quad T_1=t(A_1B_1C_1\Delta)=\frac{\left|OP^2-R^2\right|\cdot T}{4R^2},$$

ahol $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ *és* $T=t(ABC_\Delta)$.

Minthogy az $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt körének R_1 sugarára

$$R_1=\frac{A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1}{4T_1}$$



1. ábra

teljesül, ezért az eddigiek alapján R_1 kifejezhető

$$R_1 = \frac{\frac{a\cdot AP}{2R}\cdot\frac{b\cdot BP}{2R}\cdot\frac{c\cdot CP}{2R}}{4T_1} =$$

$$= \frac{AP\cdot BP\cdot CP}{8R^2}\cdot\frac{\frac{abc}{4R}}{T_1} = \frac{AP\cdot BP\cdot CP}{8R^2}\cdot\frac{T}{T_1}$$

alakban, vagy pedig a P pont $k(O;R)$ körre vonatkozó hatványával:

$$R_1 = \frac{AP\cdot BP\cdot CP}{8R^2}\cdot\frac{T}{\frac{|OP^2-R^2|\cdot T}{4R^2}} =$$

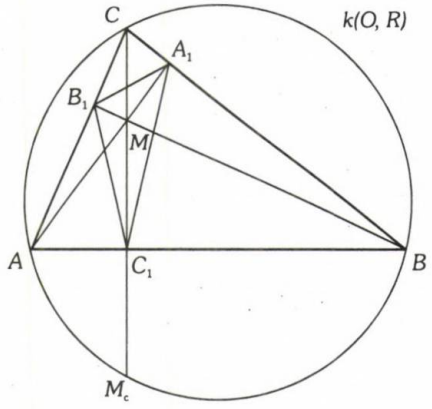
$$= \frac{AP\cdot BP\cdot CP}{2|OP^2-R^2|}.$$

Az $A_1B_1C_1$ háromszög félkerületét jelölje s_1, a beírt körének sugarát pedig r_1.
Ekkor a $T_1 = r_1 \cdot s_1$ ismert összefüggésből

$$r_1 = \frac{\frac{|OP^2-R^2|\cdot T}{4R^2}}{\frac{a\cdot AP+b\cdot BP+c\cdot CP}{4R}} =$$

$$= \frac{|OP^2-R^2|\cdot T}{(a\cdot AP+b\cdot BP+c\cdot CP)R}$$ adódik.

Ha az ABC háromszög nem derékszögű és P annak az M magasságpontjával azonos, akkor az R_1 és r_1 sugarakra kapott előbbi képletek bizonyos mértékben egyszerűsödnek.



2. ábra

Ehhez először is használjuk fel, hogy az M magasságpontnak az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre vonatkozó tükörképe illeszkedik a $k(O;R)$ körre *(2. ábra)*, s ezért $|OM^2-R^2| = CM\cdot MM_c = 2\cdot CM\cdot C_1M$. Hasonló állítás igaz az M-nek $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{CA}$ egyenesekre vonatkozó M_a és M_b tükörképeire is. Ennek alapján $P \equiv M$ esetén

$$R_1 = \frac{AM\cdot BM}{4C_1M} = \frac{BM\cdot CM}{4A_1M} = \frac{CM\cdot AM}{4B_1M}.$$

Másodszor pedig az ABC háromszög mindegyik csúcsán át húzzunk párhuzamost a szemközti oldallal: a kapott $A'B'C'$ háromszög oldalainak felezőpontjai éppen az ABC háromszög csúcsai *(3. ábra)*, azaz $a\cdot AM + b\cdot BM + c\cdot CM = t(A'B'C'_\triangle) = 4T$, és így tehát $P \equiv M$ esetén

$$r_1 = \frac{|OM^2-R^2|\cdot T}{4T\cdot R} = \frac{|OM^2-R^2|}{4R}.$$

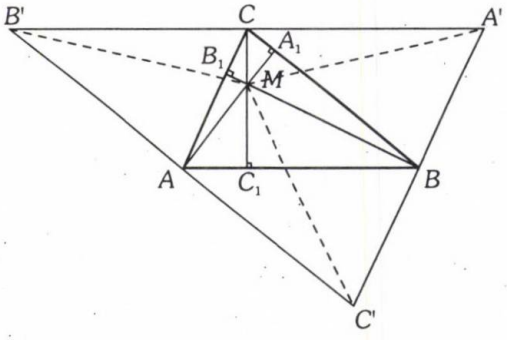
Az általános talpponti háromszög beírt körének sugarára kapott előbbi képlet ismeretében a [2]-ben megadott feladat megoldása a következő:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{4R^2}{|OM^2-R^2|} = \frac{R}{\frac{|OM^2-R^2|}{4R}} = \frac{R}{r_1}.$$

Irodalom

[1] Darvasi Gyula: Az általános talpponti háromszög területe, A Matematika Tanítása, 5. szám (2000), 8-9. oldal.

[2] A Matematika Tanítása, 5. szám (2000), 28. oldal 143. feladat



3. ábra

A 2001. évi Beke Manó emlékdíjasok

A Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó Emlékdíj Bizottsága 2001-ben a Beke Manó díj I. fokozatát ítélte oda megosztva **Szeredi Évának** és **Szendrei Juliannának** a magyar matematikaoktatás megújításáért, a tanár-, illetve tanítóképzés szakmai színvonalának emeléséért hosszú időn át végzett kiváló és eredményes munkájáért.

Indoklás:

Szeredi Éva az ELTE TFK, Szendrei Julianna az ELTE TÓFK tanára. Bár ritkán kapcsolódott össze közvetlenül, igen sok közös vonása van munkásságuknak.

Szinte a kezdetektől nagy részt vállaltak mindketten a matematikatanítás megújítására irányuló kísérleti munkában. Kutatómunkájukat egyaránt jellemzi az ötletesség, a gyakorlatban való kipróbálás, ellenőrzés és a tudományos megalapozottság iránti igényesség. Saját tanári tapasztalataikat is felhasználva készítettek társszerzőkkel tankönyveket, munkafüzeteket, tanári segédleteket, részt vettek a tantervek kidolgozásában. Színvonalas szakmaisággal és színes módszertani ötlettárral vették és veszik ki részüket a tanárok, tanítók továbbképzéseiben.

Főiskolai oktatóként is hasonlóan jellemezhető munkájuk. Szívesen, lelkesen, lelkiismeretesen foglalkoznak tanítványaikkal, sok időt fordítva konzultációkra, egyéni segítségadásra, érdeklődésük, sajátos elgondolásaik kibontakoztatására. Fiatalabb kollégáknak szintén sok területen nyújtanak szakmai és módszertani segítséget.

Szeredi Éva elsősorban a geometriával, algebrával, elemi matematikával és módszertannal kapcsolatos tárgyakat oktatja. Kreativitása, alkotó fantáziája, ötletei sok területen megújították tanszékén a képzési programot. A geometriai transzformációk feldolgozását az egész sík, illetve tér mozgatásához kapcsoló átfogó szemlélet számos területén hozzáférhetőbbé teszi a gyerekek számára ezt a nehéz témát. Az algebra kapcsolatát az aritmetikával, a számolás tanításában az algebra előkészítésének lehetőségeit kutató-elemző munkája biztonságos, tudományos alapot jelenthet a matematikatanítás továbbfejlődéséhez e területen is. Az elemi matematika tanításában egyéni-önálló kutatási feladatokon alapuló képzési stratégiát dolgozott ki, amely lényegesen növeli a hallgatók szakmai és pedagógiai képességfejlődését. E témában sikerrel dolgozott együtt külföldi kutatókkal.

Külföldön is több országban tartott szakmai előadásokat, tanulmányutakon vett részt a Tempus program keretében. Tagja az ERME matematikatanulást kutató nemzetközi tudományos egyesületnek.

Publikációi közt tudományos cikkek, társszerzőkkel írt tankönyvek, munkafüzetek sorakoznak.

Szendrei Julianna a 70-es évektől a mai napig komoly szerepet vállal olyan nemzetközi matematika-didaktikai kutatásokban, amelyek segítették megalapozni a tantárgypedagógia tudományos rangjának elismertségét hazánkban és külföldön egyaránt. Fő kutatási területe a 3-12 éves korosztályú gyerekek matematikatanulásának problematikája és ezzel párhuzamosan a tanítóképzés módszertana. Kutatásaira alapozva részt vesz a KLTE Matematika doktori programjában előadóként és témavezetőként.

Több nemzetközi és hazai kutatási program szervezője és koordinátora. Részben ezektől függetlenül is tart előadásokat, továbbképzéseket, vendégoktatói kurzusokat külföldön is a matematika különféle témáiból az európai, illetve magyar matematikatanítási kutatásokról, módszerekről.

Két nemzetközi és a szegedi Polygon matematikai folyóirat szerkesztőbizottságában dolgo-

zik, aktív tagja az ICME-9 nemzetközi matematikatanítási konferencia programbizottságának és 26 éve tagja a kb. 50 tagú Nemzetközi Matematikatanítási Bizottságnak, amelynek 2 ciklusson át alelnöki tisztét is ellátta.

Publikációinak száma 50-nél is nagyobb.

A Beke Manó-díj II. fokozatában részesül **Horváth Eszter** sok éven át végzett kiváló tanári-nevelői munkájáért és a matematikatanítás színvonalának emelését szolgáló példamutató tevékenységéért.

Indoklás:

Horváth Eszter a Budapesti Szilágyi Erzsébet Nyolcosztályos Gimnázium matematika-fizika-számítástechnika tanára. Felkészültsége, módszertani tudásának korszerűsége és következetessége, ítéleteinek megbízhatósága és meggondoltsága révén iskolájának legjobb szakmai munkaközösség-vezetője. Minden munkaterületen pontos, lelkiismeretes; tevékenységét, életét etikai rend és tisztesség jellemzi.

Szenvedélyesen szereti szaktárgyait, lelkes tanítása sok növendékét is magával ragadja. Eredményességét versenyhelyezések, sikeres felvételi vizsgák tanúsítják.

Önmagát folyamatosan képezi, emellett szívesen vesz részt egyetemisták és tanfolyami hallgatók továbbképzésében, élményt nyújtó bemutatóórák tartásával.

Iskolájában a matematika és számítástechnika helyi tantervének kidolgozója.

Az OKTV versenybizottság tagja. Szakmai véleményére szívesen támaszkodik a Bolyai János Matematikai Társulat is.

A Beke Manó-díj II. fokozatát ítélte a bizottság **Katz Margitnak** a kisiskolások értő, örömmel végzett matematikatanulását, a tanítók gyermeket és szakmát értő, örömteli matematikatanítását segítő munkájáért.

Indoklás:

Katz Margit tanító, Tolna megye alsó tagozatos szaktanácsadója, sokoldalúan képzett, magát folyamatosan képző pedagógus. Hiteles szakmai és tantárgypedagógiai felkészültségével és fáradhatatlan szervezőmunkával szolgálja a megye tanítóinak továbbképzését, szakmai irányítását, segíti gyakorlati munkáját.

Kiemelt gondot fordít a kisiskolások matematikai nevelésére; sok éven át vezetett TIT szakkört is. Példaértékű bemutató foglalkozásokat, szakmai napokat, módszertani továbbképzéseket szervez a tapasztalatszerzésre épülő matematikatanulás pszichológiai-módszertani-szakmai kérdéseinek széleskörű megismertetéséért, elfogadtatásáért.

A NAT bevezetésekor helyi tanterv kidolgozásával segíti kollégáit, a kerettanterv gyakorlati alkalmazását előadásokkal, szakanyagokkal szolgálja, eredményességét megyei mérési anyagok kidolgozásával, elemzésével kíséri figyelemmel.

A Beke Manó-díj II. fokozatában részesül **Királyné Nagy Éva** a matematikaoktatás színvonalának emelését szolgáló, igényes szaktanári, szakvezetői munkájáért.

Indoklás:

Királyné Nagy Éva a bajai III. Béla Gimnázium tanára. Pályafutásának első éveiben szakmunkásképzőben, szakközépiskolában tanított, részt vett a felnőttoktatásban is. 1983 óta dolgozik a III. Béla Gimnáziumban. Sokat ad tanítványainak, és sokat is követel tőlük. Nemcsak a legtehetségesebbek kiemelkedő versenyeredményei, a felvételik eredményessége dicsérik munkáját, hanem osztályainak matematika érettségi vizsgái is kitűnnek magas színvonalukkal.

Iskolájában az ő aktív közreműködésével készült a matematika helyi tanterv.

A Baja környéki iskolákkal szakmai együttműködésben vesz részt. Szakmai továbbképzések, vándorgyűlések rendszeres látogatója. A városi matematikaversenyeket feladatsorok összeállításával segíti.

A Szegedi József Attila Tudományegyetem szakvezető tanáraként foglalkozik a tanárjelöltekkel. Többször működött közre az egyetem felvételi bizottságának munkájában.

Szakmai igényessége, fegyelmezett munkája, áldozatkészsége miatt a diákok és a kollégái is becsülik.

A Beke Manó-díj II. fokozatával fejezi ki a bizottság **Lux Judit** kiváló munkájának elismerését, aki a Budapesti Móricz Zsigmond Gimnázium egyik „legszerényebb, legműveltebb, leglelkiismeretesebb tanára".

Indoklás:

Lux Judit az ELTE TTK matematika-fizika tanári szakának elvégzése után először a Kilián György (ma Németh László) Gimnáziumban dolgozott, azután napjainkig a Móricz Zsigmond Gimnáziumban tanít. Közben a BME Villamosmérnöki Karán is oktatott, angol nyelvű előkészítőt tartott.

Nemcsak a tehetségekkel foglalkozik eredményesen külön szakkörökön, hanem rendszeresen korrepetálja a rászorulókat is, hogy segítse felzárkózásukat. „Telefonja, lakása minden növendékének és kollégájának nyitva áll".

A matematikatanítás közéletében is fontos szerepet tölt be. A vándorgyűléseken rendszeresen részt vesz, hozzászólásaival építően járul hozzá a matematikatanítás továbbfejlesztéséhez. Az ICME-6 kongresszus egyik szervezője volt (1988). Az angol tantervet magyarra fordította. A matematikatanítás ügyét új utak keresésével, kísérletekben való részvétellel is segíti. A hatosztályos gimnáziumi kísérlet matematika tantervének kidolgozója, a kísérlet irányítója.

A Beke Manó-díj II. fokozatában részesül **Nádasi Márta** több évtizedes kiváló felső tagozatos tanári, szaktanácsadói és közoktatás-vezetői munkájáért.

Indoklás:

Nádasi Márta a Szegedi Tanárképző Főiskolán matematika-fizika szakos, majd az Eszterházy Tanárképző Főiskolán számítástechnika szakos tanári diplomát szerzett. Mindhárom tárgy tanításában, matematikában a szakosított tantervű oktatásban is eredményes munkát végzett Szirmán, majd Miskolcon. Borsod-Abaúj-Zemplén megyében aktív részese a differenciált oktatás bevezetésének, a nívócsoportos fejlesztés elterjesztésének.

1980/81 óta szakfelügyelő, szaktanácsadó. Komolyan veszi a továbbképzést, önképzést; számos tanfolyamot végzett tudása gazdagítására, látóköre szélesítésére.

Nádasi Márta hivatásának tekinti pedagógusmunkáját, tanítványait lelkiismeretesen fejleszti, kollégáit a legfrissebb információkkal tájékoztatja, munkájukat önzetlenül segíti. Hosszú, kitartó, eredményes munkája elismerését sok pedagógustárs és diák várta már egyetértéssel, örömmel.

A Beke Manó-díj II. fokozatát adományozta a bizottság **Oláh Verának** az általános és középiskolai matematikatanítás népszerűsítéséért, tanárok és diákok szakmai fejlődéséért a Kömal főszerkesztőjeként végzett óriási munkájáért.

Indoklás:

Oláh Vera 1992-től tagja a Kömal szerkesztőbizottságának, 1993 óta a lap főszerkesztője. Elévülhetetlen érdemeket szerzett a lap életben tartásában, fejlődésében, s ezzel a minőségi oktatás fejlesztésében. Oroszlánrészt vállalt a 100 éves Kömal rendezvényeinek szervezéséből, kiadványainak megjelentetéséből. A „születésnapi" CD sok iskolában hozzáférhetővé tette valamennyi korábbi cikket, feladatot az érdeklődő tanárok, diákok számára. 1993 óta a lap példányszáma jelentősen emelkedett, feladatmegoldó tábora szélesedett. A népszerűsítés szélesebb fokát jelzi, hogy a lap számos részlete ma már az interneten is olvasható.

Oláh Vera figyeli a Kömal-ba bekapcsolódó új iskolák munkáit, támogatja ezen tanárok kitüntetését. Ő hozta létre az ún. „C" versenyt, s így bekapcsolódhattak a versenybe szakmunkásképzős és szakközépiskolai tanulók is.

Az utóbbi néhány évben a lap Téli Ankétja az ifjúsági matematikai élet jelentős rendezvényévé nőtte ki magát. Ennek szervezése, anyagi és szellemi alapjának biztosítása is nagy részben Oláh Vera erőfeszítéseinek eredménye.

Urbán János

A XXX. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület hagyományosan Vácott rendezte meg az ez évi Kalmár László Országos Matematikaverseny döntőjét 2001. június 26-28-ig. Az immár XXX. Országos Verseny döntőjébe az 5.-8. osztályos tanulók közül 98-an jutottak be az ország minden részéből. A kétnapos versenyen az egyes osztályokban a legjobb eredményeket a következő tanulók érték el:

5. osztály

1. Korándi Dániel, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanára: Kovács Csongorné),
2. Üveges Lilla, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanára: Karamán Ferencné és Paulin Elemér),
3. Szilágyi Áron, Budapest, Fenyves Utcai Általános Iskola (tanára: Bereczki Ákosné).

6. osztály

1. Kunovszki Péter, Mohács, Brodarics Téri Általános Iskola (tanára: Kunovszki István és Kiel Mátyásné),
2. Dudás László, Nyíregyháza, Bem József Általános Iskola (tanára: Szilkainé Mándy Márta),
3. Nagy Csaba, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanára: Széplaki Györgyné).

7. osztály

1. Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium (tanára: Schultz János),
2. Pesti Veronika, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium (tanára: Erdős Gábor),
3. Szaller Dávid, Gyöngyös, Berze Nagy János Gimnázium (tanára: Farkas Béláné).

8. osztály

1. Steller Gábor, Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanára: Morvai Éva és Juhász Péter),
2. Tassy Gergely Budapest, Veres Péter Gimnázium (tanára: Számadóné Békéssy Szilvia),
3. Németh Bertalan, Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium (tanára: Brenyó Mihály és Csordásné Szécsi Jolán).

A döntő két napján a versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

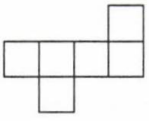
Ötödik osztály
1. nap

1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely egy egész szám harmadik hatványa? (Például $13\ 3\ 1 = 11^3$ ilyen szám.)

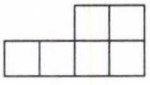
2. Egy bizonyos hónapban három kedd dátuma is páros szám volt. Hányadika volt ebben a hónapban az utolsó pénteki nap?

3. Egy kocka kiteritett hálója 6 egybevágó négyzetből álló összefüggő alakzat, amiből kockát lehet hajtogatni.

Ebből például lehet kockát hajtogatni:



ebből pedig nem:



Rajzolj minél több olyan alakzatot, amelyek egy kocka kiterített hálói lehetnek!

4. A következő szorzásban bizonyos számjegyek helyett x-et írtunk. Mi volt az eredeti szorzás?

2xx · 3xx
xx3
x4x
5xx
xxxxx

A megfejtéshez annyit elárulunk, hogy az ismeretlen számjegyek között nem szerepel 7. Természetesen az x-ek helyére különböző számjegyek is kerülhetnek.

Írj indoklást is!

Hatodik osztály
1. nap

1. Az a természetes számról tudjuk, hogy osztható 5-tel és 49-cel is, továbbá összesen 10 pozitív osztója van (1-et és a-t is beleértve). Mi lehet az értéke?

2. Igazoljuk, hogy ha egy konvex kilencszögnek nincs két párhuzamos átlója, akkor van két olyan átló, amelyeknek egyenese 7°-nál kisebb szöget zár be egymással!

3. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely csupa különböző számjegyből áll?

4. Az ABC derékszögű háromszög A csúcsában 30°-os , B csúcsában 60°-os szög van. A háromszöget tükrözzük az AB átfogó egyenesre, majd az így kapott $ACBC_1$ négyszöget újra tükrözzük a CC_1 átlójára. A tükörkép az $A_1CB_1C_1$ négyszög. Hányad része az ACA_1C_1 négyszög területének a CBC_1B_1 négyszög területe?

Hetedik osztály
1. nap

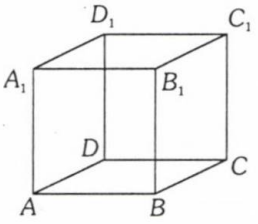
1. Előállítható-e 2001 két egész szám négyzetének összegeként?

2. Egy társaság kiránduláshoz autót bérelt 22 000 Ft-ért. Az elutazáskor még egy fő csatlakozott hozzájuk, ezért mindenkinek 200 Ft-tal kevesebbet kellett fizetni az autóért. Hány tagú volt eredetileg a társaság, ha mindenki ugyanannyit fizetett?

3. Az ABC háromszögben $AB = BC$ és az ABC szög 80°-os. A P pont a háromszögön kívül úgy helyezkedik el, hogy a PAC szög 10°-os és a PCA szög 30°-os. Mekkora a BPA szög?

4. Mennyi a legnagyobb közös osztója az
$A = 2001^{2000} + 2000^{2001}$ és a
$B = 2000 \cdot 2001$ számoknak?

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka éle 1 cm. Egy pók az A csúcsban ül, és másodpercenként 1 cm-t tud mászni a kocka felületén.



Határozzuk meg a kocka felületének azt a részét, amelyet 2 másodperc alatt a pók sehogyan sem tud elérni!

Nyolcadik osztály
1. nap

1. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$$ egyenletet!

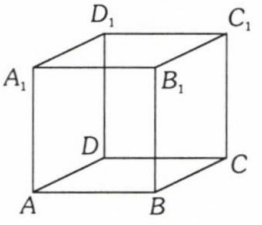
2. Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldala $AB = 4$, $CD = 2$ egység. A P pont az AD száron, Q pedig a BC száron van úgy, hogy PQ párhuzamos AB-vel, és a PQ szakaszt a két átló három egyenlő részre osztja. Mekkora a PQ szakasz?

3. Az a_1, a_2, a_3, ..., a_{49} pozitív egész számok összege 999. Legfeljebb mennyi lehet ennek a 49 számnak a legnagyobb közös osztója?

4. Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+$$
$$+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$$

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka éle 1 egység. A P pont a BD szakaszon, a Q pont pedig a CC_1 szakaszon úgy helyezkedik el, hogy a PQ egyenes az $ABCD$ síkkal 45°os, a BCC_1B_1 síkkal pedig 30°-os szöget zár be. Mekkora a PQ távolság?



Ötödik osztály
2. nap

1. Ha egy egész szám harmadát elosztjuk ugyanennek a számnak a 17-ed részével (mindkettő szintén egész szám), akkor a maradék 100 lesz. Melyik egész számról van szó?

2. Egy végzős iskolai osztályban minden tanuló megajándékozza minden osztálytársát a saját fényképével. Összesen 992 fénykép cserélt gazdát. Hányan jártak az osztályba?

3. Van 10 darab egybevágó (egyforma) papírkockánk. Lehet-e ezekből olyan összefüggő testet építeni, amelynek teljes felszíne egy kockalap területének 25-szöröse? (Nem kell minden kockát felhasználni, és két kockát csak egy-egy teljes lapjával lehet összeragasztani.)

4. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb egész szám, amely 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel és I 1 gyel osztva is 1 maradékot ad?

Hatodik osztály
2. nap

1. Négy óra után hány perc múlva fedi először egymást a percmutató és az óramutató?

2. A négyzetrácsos (kockás) papíron megrajzoltak egy olyan téglalapot, amelynek oldalai rácsegyeneseken vannak, csúcsai rácspontok, és oldalai 8 és 10 egység hosszúak (egy egység egy rácsnégyzet oldalának hossza). Hány négyzet látható ebben a téglalapban (olyan , amelynek oldalai rácsegyeneseken vannak, csúcsai rácspontok)?

3. Írjátok le a mai dátumot így: 20010627. A kapott nyolcjegyű szám számjegyeit írjátok más sorrendbe (mindegy, milyenbe): 21600207. A két szám közül a nagyobbikból vonjátok ki a kisebbet: 1598580. Adjátok össze a kapott szám jegyeit: 36, majd a most kapott szám jegyeit: 9. Induljatok ki a születésetek dátumából, és végezzétek el ugyanezeket a műveleteket! Mit kaptatok? Magyarázzátok meg!

4. Egy háromszög két szöge 20° és 60°. Mutassátok meg, hogy a háromszög egyetlen egyenessel két egyenlőszárú háromszögre bontható!

Hetedik osztály
2. nap

1. Ha az 1/3- tört számlálóját és nevezőjét megnöveljük a nevező értékével, akkor kétszer akkora számot kapunk. Keressünk olyan törtet, amely két pozitív egész szám hányadosa, és *a)* 3-szorosára, *b)* 5-szörösére nő, ha a nevezőjét hozzáadjuk a számlálójához és a nevezőjéhez is!

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben a P és Q pontok az AB oldalt, az R és S pontok a CD oldalt 3 egyenlő részre osztják. Hányszorosa az $ABCD$ négyszög területe a $PQRS$ négyszög területének?

3. Igazoljuk, hogy öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet teljes négyzet!

4. Hány olyan n szám van az első kétezer pozitív egész szám között, amelyre igaz, hogy az n és az $n+1$ szám számjegyeinek összege is páratlan szám?

Nyolcadik osztály
2. nap

1. Tegyük fel, hogy $A = \overline{abc}$ egy háromjegyű prímszám. Mutassuk meg, hogy A nem lehet osztója egy olyan számnak, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy a számjegyei sorrendjét megváltoztatjuk!

2. Az ABC derékszögű háromszög átfogója AB. A BC befogó, mint átmérő fölé rajzolt kör az AB átfogót a (B-től különböző) D pontban metszi. A körhöz a D pontban húzott érintőnek és az AC befogónak a metszéspontja E. Igazoljuk, hogy $DE = EA$!

3. A négyzetrácsos (kockás) papíron megrajzoltak egy téglalapot, amelynek csúcsai rácspontok, oldalai rácsegyenesekre esnek, és hosszuk n és $n-1$ egység (az egység a rácsnégyzet oldala). Hány olyan négyzet van ebben a téglalapban, amelynek csúcsai rácspontok, oldalai rácsegyenesekre illeszkednek?

4. Egy konvex szabályos hatszög oldalának hossza a. Az egyik csúcsán áthaladó egyenes két olyan részre osztja a hatszöget, amelyek területének aránya 3 : 1. Milyen hosszú az egyenesnek a hatszögbe eső darabja?

Marczis György

Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap

Erkel Ferenc Gimnázium, Gyula, 2001

„Minden, ami emberi, akár jó, akár rossz, előbb-utóbb véget ér. Kivéve a matematikát."
Erdős Pál

Nagy sikerrel zárult március 24-én Gyulán az Erkel Ferenc Gimnáziumban rendezett *Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap.* Immár ötödszörre gyűltek össze a fürdővárosi gimnáziumban a megye legjobb középiskolás matematikusai és az érdeklődő matematikatanárok.

A vendégeket az ünnepélyes megnyitón *Hőgye Orsolya* és *Sztán Gabriella,* a rendező iskola két tanulójának fuvolajátéka, valamint Babits Mihálynak a *Kristóf István* által elmondott Bolyai című verse köszöntötte. *Dr. Kereskényi Miklós,* az Erkel Ferenc Gimnázium igazgatója és *dr. Hajnal Péter,* a verseny névadójának fia üdvözölte a közel kétszáz megjelentet. Ezután olvasta fel *Marczis György,* a szervezésért felelős szaktanácsadó *dr. Pokorni Zoltán* művelődési miniszternek a rendezvény résztvevőihez írott személyes köszöntő levelét

Miközben a diákok a 120 percesre tervezett 30 feladatos tesztlapot töltötték ki, addig az érdeklődő vendégek meghallgathatták *dr. Németh József* egyetemi docens *„A π-ről mindenkinek", dr. Korányi Erzsébet* vezetőtanár *„A gyermekközpontú matematikatanítás"* és *dr. Gerőcs László* vezetőtanár *„Azok a csodálatos húrnégyszögek"* című előadásait.

Miután a diákok befejezték munkájukat, a még közben érkező vendégekkel együtt több, mint 200-an meghallgatták *dr. Czeizel Endre* orvosgenetikus egyetemi tanár *„Talentum és genetika"* című nagy sikerű előadását.

Közben a háromfős zsűri *(dr. Németh József, dr. Pappné Ádám Györgyi és Székely András)* az értékelőlapok kijavításához kezdett.

Ezután *Kosztolányi József* egyetemi adjunktus ismertette az általa összeállított feladatlap helyes megoldását.

A programokkal egy időben a *Műszaki Könyvkiadó,* a *Mozaik Kiadó,* a *Konsept-H Kft.* és a *Texas Instruments* a témával kapcsolatos kiadványaiból tartott vásárlással egybekötött bemutatót.

Kora délután már eredményt hirdettek. *Dr. Németh József,* a zsűri elnöke értékelte a versenyzők munkáját, és kiemelte, hogy a nehéz feladatok ellenére igen magas pontszámot értek el a legjobb tanulók. Ezután átadta a győztesnek és a helyezetteknek, valamint felkészítő tanáraiknak a támogatók által felajánlott értékes jutalmakat. Ebben segített neki *Gyöngyösi András,* aki az Euro-Profil Rt. által felajánlott fődíjat, egy Texas Instruments grafikus számológépet nyújtott át a legjobb tanulónak, valamint dr. Czeizel Endre, aki a győztes tanuló felkészítő tanárát köszöntötte. Az egész napos rendezvény dr. *Kereskényi Miklós* igazgató jövő évre szóló meghívó szavaival ért véget.

A verseny végeredménye: **1.** *Baur Eszter* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Szabó Zsófia),* **2.** *Kmellár Béla* (Kner Imre Gimnázium, ta-

nára *Tóthné Szakálas Margit*), **3.** *Tóth János* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Szabó Zsófia*), **4-5.** *Jelenka József* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Pocsai Zoltánné*) és *Kádas Attila* (Rózsa Ferenc Gimnázium, tanára *Szabó Zsófia*). **6.** *Nadabán János* (Széchenyi István Közgazdasági és Külkereskedelmi Szakközépiskola, tanára *Rókáné Rózsa Anikó*). A legjobb „Erkel"-es különdíjat *Boros Péter* (tanára *Marczis György*) kapta.

A Bolyai János Matematikai Társulat Békés Megyei Tagozata és az Erkel Ferenc Gimnázium köszöni mindazoknak a segítségét, akik nélkül a Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Nap nem jöhetett volna létre.

Fő támogatóink voltak: *Békés Megyei Humán Fejlesztési és Információs Központ, BJMT Békés Megyei Tagozata, Dürer Nyomda és Kiadó Kft., Erkel Ferenc Gimnázium Alapítvány, Gyula város Polgármesteri Hivatala, Implom József Alapítvány, Konsept-H Könyvkiadó és Kereskedelmi Kft., Mozaik Kiadó, Műszaki Könyvkiadó, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Texas Instruments, Typotex Elektronikus Kiadó Kft.*

Támogattak: *AQUARELL – Kovács Z., Köles M., Pfeff M., Szabó Z., Bagyinszki Zoltán, Békés Megyei Hírlap, Békés Megyei Nap, Bibliofil Kft. Könyvesbolt – Gyula, BOBOSZ Kft. – Bor Gábor, Szabó István, Busa László, Corvin Hotel - Bozó András – Gyula, Csepi Ker. Kft. – Csepregi Lajos, „Ez is az is" ABC – Bacsa Magdolna, Faragó Ágota, fazekas – Gyula, FHM Munkás Kft. – Ózd, Göndöcs Benedek Szakképző Iskola, Győri Keksz Kft. – Pásztor Zoltán, Gyulai Hírlap, Gyulai Várszínház, Hevesi Tamás, Info-Set Kft. – Kiss Imre, Kereskedelmi és Hitelbank – Gyula, Maris Tibor, Nádházi István, Profi Foto – Puy László, Schneider Nyomda – Schneider János, SHANNON IRODA, Simon Béla – Nyíregyháza, Szabó József, Tébi Ferenc, Tessedik Sámuel Főiskola-Békéscsaba, Városi Tornacsarnok, Gyula – Horváth Béla, Zugevő Pizzéria – Annus Géza.*

Feladatlap

1.

$$\frac{9^3 \cdot 3^4 \cdot \left(3^5\right)^2}{9^2 \cdot 3^3 \cdot \left(3^2\right)^4} =$$

(A) 3 (B) 9 (C) 3^6 (D) 243 (E) 9^{-2}

2.

$$\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}} =$$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{7}{12}$

3. Melyik lehet négyzetszám?

(A) 400000001 (B) 1357911113 (C) 999999996 (D) 152399025 (E) 642870114

4. Az $(a; 3)$ és $(1; a)$ pontok illeszkednek az $y=ax+b$ egyenesre. Ha a pozitív, akkor értéke

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) $\sqrt{5}$

5. Egy téglalap hosszabbik oldala 3 cm-rel nagyobb, mint a rövidebb oldal. Az átló hossza 6 cm-rel kisebb, mint a téglalap kerületének fele. Mekkora a téglalap kerülete?

(A) 24 cm (B) 42 cm (C) $20+10\sqrt{3}$ cm (D) 49 cm (E) 21 cm

6. a és b olyan valós számok, hogy $a - 3b = 7$ és $3a - 5b = 9$. $|b - a| =$

(A) 0 (B) –1 (C) 2 (D) 8 (E) 1

7. A természetes számok halmazának egy részhalmaza tartalmazza az összes olyan számot, amely 7-tel osztva 6, 8-cal osztva 7, 9-cel osztva 8 maradékot ad, és a részhalmaz minden egyes eleme ilyen tulajdonságú. Ezen részhalmaz legkisebb eleme

(A) 504 (B) 56 (C) 71 (D) 503 (E) 1007

8. Okos Pisti az iskolában a következőt meséli: „Képzeljétek, a nagyapámnak ma van a születésnapja. Találjátok ki, hány éves! Elárulom, hogy a nagypapa éveinek száma 50 és 80 között van, és megegyezik gyermekei és unokái számának összegével. Mi nagy család vagyunk,

a nagypapa minden egyes gyermekének pontosan annyi gyereke van, mint ahány testvére." Pisti nagyapjának életkora

(A) 56 (B) 72 (C) 64 (D) 76
(E) nem határozható meg egyértelműen

9. Jelölje H azt az ötelemű ponthalmazt, amelynek elemei egy négyzet csúcsai és középpontja. Hány olyan kör van, amely legalább három *H*-beli pontra illeszkedik?

(A) 5 (B) 4 (C) 6 (D) 1 (E) 10

10. 2001 darab pozitív egész szám közül akárhánynak az átlaga 1001. Mekkora a számok legkisebbike?

(A) 0 (B) 1 (C) 1001 (D) 2001
(E) nem határozható meg egyértelműen

11. Rendelkezésünkre áll 120 darab kartonpapírból kivágott téglalap. Ezekből vagy közülük valahányból egy konvex testet akarunk építeni. Legfeljebb hány lapja lehet ennek a testnek?

(A) 4 (B) 6 (C) 30 (D) 40 (E) 120

12. $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1999}+\frac{1}{1999\cdot 2001}=$$

(A) $\frac{2000}{2001}$ (B) $\frac{333}{667}$ (C) $\frac{1000}{2001}$ (D) 1
(E) $\frac{1001}{2001}$

13. A háromjegyű $\overline{xyy}$ tízes számrendszerbeli szám számjegyeinek összege a kétjegyű $\overline{xz}$ szám. Ez utóbbi szám számjegyeinek összege *y*. A kiinduló háromjegyű szám legnagyobb prímosztója

(A) 11 (B) 13 (C) 3 (D) 73 (E) 47

14. Egy 60°-os szögtartományban adott két kör, amelyek érintik a szög szárait és egymást is. Ha a nagyobbik kör sugara r, akkor a kisebbik kör területe

(A) $\frac{r^2\cdot\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{9}\cdot r^2$ (C) $\frac{r^2\cdot\sqrt{3}}{9}$
(D) $\frac{r^2\cdot\pi}{6}\cdot\sqrt{3}$ (E) $\frac{2\cdot r\cdot\pi}{3}$

15. Hány olyan pozitív egészekből álló *(k; l)* számpár van, amelyekre $k+l\le 100$, és

$$\frac{k+l^{-1}}{k^{-1}+l}=13?$$

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 13

16. Egy kereskedő árut vásárolt, amelyet némi haszonnal (magasabb áron) szeretne eladni. A konkurencia hatására a tervezett eladási árat a vételár 10%-ával csökkentenie kell, így a várt haszon a kétharmad részére csökken. Az árleszállítás előtt várt haszon hány százaléka a vételárnak?

(A) 25 (B) 10 (C) $33\frac{1}{3}$ (D) 30
(E) ezek közül egyik sem

17. Egységnyi élű kis kockákból egy nagyobb kockát állítunk össze. Ha a rendelkezésünkre álló egységkockákból a lehető legnagyobb kockát rakjuk össze, akkor 70 kis kocka kimarad. Ahhoz viszont, hogy minden él mentén eggyel több egységkockát rakjunk, szükségünk lenne 21 kis kockára. Hány egységkockánk van?

(A) 200 (B) 125 (C) 195 (D) 216 (E) 150

18. Egy tengelyesen szimmetrikus trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakasz hossza *a*. Tudjuk még, hogy a trapéz átlói merőlegesek egymásra. A trapéz területe

(A) $\frac{a^2}{2}$ (B) a^2 (C) $\frac{3a^2}{4}$ (D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
(E) nem lehet egyértelműen meghatározni.

19. Jelölje *T* egy szabályos sokszög területét. Tükrözzük a sokszög köré írható kör középpontját rendre a sokszög oldalegyeneseire. A kapott képpontok által meghatározott sokszög területe *T'*. Hány oldalú az eredeti sokszög, ha $T'/T=3$?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

20. Az n szám egy pozitív egész szám négyzete, $d(n)$ az n pozitív osztóinak a száma. Melyik nem lehet $d(n)$ értéke?

(A) 2001 (B) 28 (C) 13 (D) 99
(E) az előzőek közül egyik sem

21. Okos Pisti úgy számítja ki az x, y, z számok A számtani közepét, hogy előbb kiszámítja az x és y számok számtani közepét, majd a kapott eredménynek és z-nek veszi a számtani közepét. Ha $x < y < z$, akkor Pisti eredménye

(A) helyes (B) mindig kisebb, mint A
(C) mindig nagyobb, mint A
(D) vagy kisebb, mint A, vagy egyenlő A-val
(E) vagy nagyobb, mint A, vagy egyenlő A-val.

22. Az $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$ elsőfokú függvényre teljesül, hogy bármely valós x esetén $f(x) + f(x + 1) = 2x + 5$. Ekkor $a^b =$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 32
(E) nem határozható meg egyértelműen

23. Egy pozitív számokból álló számtani sorozatról tudjuk, hogy kiválasztva az első n elemet, ezek közül az utolsó 9-szerese az elsőnek, az utolsó három elem összege pedig 5-szöröse az első három elem összegének. Mennyi az n?

(A) 9 (B) 13 (C) 5 (D) 19
(E) nem határozható meg egyértelműen

24. Az ABC háromszögben $AC = BC$. Legyen P az AC oldal A-hoz közelebbi, Q pedig a BC oldal C-hez közelebbi harmadoló pontja. Messe a PQ egyenes az AB egyenest M ben!

Ekkor $\frac{MB}{AB} =$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

25. Az $\{1; 2; 3; ...; 2001\}$ halmazt úgy akarjuk felbontani egymástól idegen részhalmazokra, hogy egyik részhalmazban se legyen együtt egy szám és a kétszerese. Legalább hány részhalmazra van ehhez szükségünk?

(A) 10 (B) 1024 (C) 2 (D) 5 (E) 11

26. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben hány olyan egyenes illeszkedik a (4; 3) pontra, amely az x tengelyt egy (pozitív) prímszám abszcisszájú pontban, az y tengelyt egy pozitív egész ordinátájú pontban metszi?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

27. A tízes számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok között hány olyan van, amelynek jegyei a számban elfoglalt helyüknek megfelelően szigorúan csökkenő vagy szigorúan növekvő sorozatot alkotnak?

(A) 168 (B) 120 (C) 216 (D) 240 (E) 204

28. Ha $A = 2001^3 + 3 \cdot 2001^2 + 3 \cdot 2001 + 1$, akkor A pozitív osztóinak száma

(A) 256 (B) 2 (C) 16 (D) 2002 (E) 2001

29. Az $|\sin x| = \frac{2x}{201\pi}$ egyenlet valós megoldásainak száma

(A) 101 (B) 202 (C) 201 (D) 1 (E) nincs valós megoldás

30. Egy vonat, amely Szegedről Budapestre ment, Ceglédtől pályaépítési munkák miatt n-ed részére csökkentette a sebességét, így a órát késett. Ha Budapesthez b kilométerrel közelebb csökkentette volna n-ed részére a sebességét, akkor késése c óra lett volna ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $n \in Z^+$). A vonat eredeti sebessége km/h-ban

(A) $b \cdot \frac{n-1}{a-c}$ (B) $a \cdot \frac{n-1}{b-c}$ (C) $b \cdot \frac{n-1}{c-a}$
(D) $\frac{bn-1}{a-c}$ (E) $\frac{bn}{a-c}$

A feladatok helyes megoldásai:

DDDCB EDCAC BCEBC DCBDB CCBCC CEABA

Pethőné Vendel Teréz – Bereczkiné Székely Erzsébet

Beszámoló a GORDIUSZ Matematika Tesztversenyről

Az ötödik alkalommal megrendezett GORDIUSZ Matematika Tesztversenyre ebben a tanévben Magyarország 19 megyéjéből, Budapestről 4 körzetből, Erdélyből és Vajdaságból összesen 9646 magyar középiskolás nevezett.

A döntőre 2001. április 7-8-án került sor Pécsett, amelyre az első fordulóban legjobb eredményt elért 172 tanulót hívtuk meg.

Az április 7-i ünnepélyes megnyitó után, amelyet a Leőwey Klára Gimnáziumban tartottunk, következett a verseny. Minden évfolyamon 30 feladatot kellett megoldani 90 perc alatt, és a lehetséges 5 válasz közül az 1 helyeset kiválasztani.

A verseny közben a kísérő tanárok részére Somfai Zsuzsa, a Fővárosi Pedagógia Intézet vezető szaktanácsadója tartott előadást „Ne csak válaszoljunk, kérdezzünk is" címmel.

A versenyt közös feladatmegoldás követte. Az eredmények kiértékelése számítógéppel történt a 4H – R +30 képlet alapján, ahol H a helyes, R a rossz válaszok száma.

Délután városnézésen vagy mecseki sétán vehettek részt az érdeklődők, este Nagy Bandó András szórakoztatta a verseny résztvevőit.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre vasárnap a Művészeti Szakközépiskolában került sor, ahol Somfai Zsuzsa köszöntötte a résztvevőket, és a jutalmakat vendégeink adták át a helyezetteknek.

Az egyes évfolyamok díjazott versenyzői a következők:

9. évfolyam

1. Egri Attila, Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
2. Tóth Anett, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged
3. Sebó Andrea, Erdei Ferenc Kereskedelmi és Közgazdasági Szki., Makó
4. Pongrácz András, Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok
5. Tolnai Gábor, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
6. Csorba Beáta, Neumann János Közgazdasági Szki. és Gimn., Eger

10. évfolyam

1. Ruppert László, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
2. Csóka Endre, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
3. Pelládi Gábor, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc
4. Komjáthy Júlia, Garay János Gimnázium, Szekszárd
5. Sparing Dániel, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest
6. Gáthy Lajos, Zalka Máté Gimnázium, Fehérgyarmat

11. évfolyam

1. Hamar Gergő, Illyés Gyula Gimnázium, Dombóvár
2. Péterfalvi Ferenc, Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
3. Kamarás Csaba, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest
4. Zavarkó Gábor, Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

5. Tóth Ágnes, Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló
6. Antal Miklós, PTE Babits Mihály Gyakorló Gimnázium, Pécs

12. évfolyam

1. Babos Attila, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Budapest
2. Vető Bálint, Vörösmarty Mihály Gimnázium, Érd
3. Wéber Zoltán, Eötvös József Gimnázium, Tata
4. Pozsgay Balázs, Magyar-Német Nyelvű Iskolaközpont, Pécs
5. Vizer Tibor, Piarista Gimnázium, Kecskemét
6. Jelenka József, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba

Az első helyezetteknek dr. Kékes Ferenc, a Baranya Megyei Közgyűlés elnöke adta át a jutalmakat. A döntőn szereplő minden résztvevő kapott oklevelet, amelyet H. Barakonyi Klára festő- és grafikusművész tervezett.

Különdíjak:

1. Staub Ernő Pécs Megyei Jogú Város Közgyűlése Közoktatási Bizottságának tagja évfolyamonként egy-egy számológéppel jutalmazta a legeredményesebb határon túli versenyzőket.
9. évfolyamon: Gazdag Lehel, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
10. évfolyamon: Szilágyi Zoltán, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy.
11. évfolyamon Hallgató Attila, Szabadkai Gimnázium, Szabadka
12. évfolyamon: András Csaba, Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad

2. Kucsanda Ibolya a Baranyai Pedagógiai Szolgálatok Központjának igazgatója a legeredményesebb baranyai versenyzőnek, Ruppert Lászlónak a Janus Pannonius Gimnázium tanulójának adott könyvjutalmat.

3. A MATEK Alapítvány kuratóriuma és a verseny szervezői nevében dr. Poronyi Gábor azoknak a diákoknak adott névre szóló kerámiát, akik négy éven keresztül a döntő résztvevői voltak:

1. Bozsik Balázs, Varga Katalin Gimnázium, Szolnok
2. Fehér Gergely, Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
3. Jelenka József, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba
4. Paczári Krisztián, Zrínyi Ilona Gimnázium, Nyíregyháza
5. Szeti Balázs, Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
6. Vető Bálint, Vörösmarty Mihály Gimnázium, Érd

(A versenyről információkat olvashatnak az interneten a www.extra.hu/gordiusz-matek címen.)

Az alábbiakban a tanulók számára kitűzött feladatsorokból válogatást közlünk. (A feladatsorokat Bereczkiné Székely Erzsébet, Pethőné Vendel Teréz, Polcz Katalin és dr. Poronyi Gábor állították össze, dr. Achs Ágnes és Póla József lektorálták.)

1. Péter és Pál fahasábokat fűrészelnek szét 5 részre. Hány perc alatt végeznek 10 fahasáb szétvágásával, ha minden vágás 3 percig tart, és minden negyed óra munka után 5 percet pihennek?

(A) 120 (B) 155 (C) 160 (D) 185 (E) 190

2. Bergengóciában a rendszámok hat számjegyből állnak, de nem kezdődhetnek nullával. Az országgyűlési képviselők szolgálati autóin van az összes olyan rendszám, melyen a számjegyek növekvően következnek egymás után. Hány tagú a bergengóc parlament, ha minden képviselőnek pontosan egy szolgálati gépkocsija van?

(A) 84 (B) 125 (C) 210 (D) 389 (E) 720

3. Adott egy egyenesen n pont és egy vele párhuzamos egyenesen 3 pont. Legalább mennyi az n, ha az összes olyan háromszög, amelynek csúcsai a kijelölt pontok közül valók, nem kevesebb 2001-nél?

(A) 26 (B) 30 (C) 37 (D) 61 (E) 63

4. Ha $f(x)$ olyan lineáris függvény, amelyre $f(1) \le f(2)$, $f(-1) \le f(-2)$ és $f(0) = 3$, akkor mivel egyenlő $f(2) - f(-2)$?

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

5. Anti, Béla, Csabi és Dani osztálytársak. Április elsején a következőket állították:

– Anti: Négyünk közül Bélának sikerült a legtöbb osztálytársát beugratnia.
– Béla: Négyünk közül Csabinak sikerült a legtöbb osztálytársát beugratnia.
– Csabi: Nem nekem sikerült a legtöbb osztálytársamat beugratni.
– Dani: Nem nekem sikerült a legtöbb osztálytársamat beugratni.

A négy állítás közül csak egy igaz, három hamis. Kinek sikerült a legtöbb osztálytársát beugratnia?

(A) Antinak (B) Bélának (C) Csabinak
(D) Daninak (E) nem dönthető el

6. Milyen k értéknél rajzolható meg az f: $[-2; 3] \to \mathbf{R}$.

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2^x, \text{ ha } x > 0 \\ x + k, \text{ ha } x \le 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja a toll felemelése nélkül?

(A) $k = 0$ (B) $k = 1$ (C) $k = \frac{1}{5}$ (D) $k = 5$
(E) nincs ilyen k

7. Két egyforma pohár egyikét (P_1-t) félig vízzel, a másikat (P_2-t) félig 100%-os alkohollal töltötték meg. A P_1 pohárból átteszünk egy kanál vizet a P_2-be, összekeverjük a folyadékot, majd egy kanállal visszateszünk P_1-be. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

(A) A P_1 pohárban több alkohol van, mint amennyi víz van P_2-ben.
(B) A P_1 pohárban kevesebb alkohol van, mint amennyi víz van P_2-ben.
(C) A P_2 pohárban 100%-os alkohol van.
(D) A P_1 pohárban levő folyadék tiszta víz.
(E) Az előzőek egyike sem igaz.

8. Egy kerékpáros állandó sebességgel haladva elmegy egy kilométerkő mellett, melyre az $\overline{xy}$ kétjegyű számot írták ($y > x$). Egy óra múlva az $\overline{yx}$ kétjegyű számot tartalmazó kilométerkőhöz ér. Újabb négy óra múlva olyan kőhöz ér, melyen az $\overline{(x-1)(y+2)0}$ háromjegyű szám áll. Hány km/h a kerékpáros sebessége?

(A) 25 (B) 27 (C) 36 (D) 45 (E) 52

9. Egy pozitív egész számot nyerőnek nevezünk, ha 1-ből kiindulva a következő eljárással kaphatjuk meg:

a) felváltva van összeadás és szorzás
b) az összeadásnál 2-t vagy 3-at adhatunk az előző számhoz
c) a szorzásnál 2-vel vagy 3-mal szorozhatjuk az előző számot

Melyik szám nem nyerő az alábbiak közül?

(A) 2 (B) 3 (C) 7 (D) 8 (E) 9

10. A májusi edzésterv szerint Peti úszásadagja – az első és az utolsó nap kivételével – az adott napot megelőző és az azt követő napon teljesítendő kilométer szorzatánál 1 km-rel kevesebb. Hány km-t úszik Peti májusban, ha elsején 2 km-t, másodikán 3 km-t úszik, és pontosan teljesíti az edzéstervet?

(A) 31 (B) 47 (C) 50 (D) 54 (E) 56

11. Az $ABCD$ egyenes gúla alaplapja az a oldalú ABC szabályos háromszög. Az alaplaphoz tartozó testmagasság felezőpontja F. Az AF, BF és CF szakaszok páronként 60°-os szöget zárnak be egymással. Mekkora a gúla térfogata?

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

(D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (E) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

12. Hány olyan n egész szám van, amelyre $\sqrt{5n^2+5n+2}$ racionális szám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 3-nál több

13. Egy négyzet alapú gúla oldallapjai egybevágóak. Az egyik lapját pirosra, kettőt fehérre, kettőt zöldre szeretnénk befesteni. Hány különböző módon lehetséges ez, ha a mozgatással egymásba átvihető eseteket nem tekintjük különbözőeknek?

(A) 10 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

14. Egy tálcán 6 × 6-os elrendezésben 36 db négyzet alapú krémes található. Ha Zsiga annyit ehet belőle, ahányat egy egyenes vonallal meg tud jelölni, akkor maximum hány szeletet ehet?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 14

15. Egy körmérkőzéses kézilabda-bajnokságban 7 csapat vett részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Győzelemért 2, döntetlenért 1, vereségért 0 pontot kaptak. A bajnokság végén nem volt két azonos pontszámú csapat. Legfeljebb hány mérkőzés végződhetett döntetlenre?

(A) 0 (B) 10 (C) 15 (D) 21 (E) 30

(Megoldókulcs: BACCD BEBCE EABCC)

Az első és második forduló feladatait és megoldásait tartalmazó könyvhöz augusztus végéig várunk érdekes megoldásokat kollégáktól és diákoktól is a következő címre:

MATEK Alapítvány, 7618. Pécs, Pf.: 56.

(Természetesen a könyvben a megoldás mellett a beküldő neve is szerepelni fog.)

Dr. Urbán János

Beszámoló a X. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A X. jubileumi Nemzetközi Magyar Matematikaverseny megrendezését Nagykanizsán a Batthyány Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola vállalta. Dr. Pintér Ferenc tanár úr, főszervező és Mayer Ferenc igazgató úr vezetésével a szervező iskola ideális körülményeket biztosított ahhoz, hogy a 4 szomszédos országból és hazánkból jött közel 300 versenyző és tanár igazán jól érezze magát a 2001. április 6-10-ig tartó versenyen.

Az április 7-i impozáns ünnepélyes megnyitó után délután több ismeretterjesztő előadás közül választhattak a diákok és a tanárok. Különösen érdekes volt és nagy sikert aratott dr. Németh József (JATE) előadása „A végtelen a matematikában" címmel. Este a felsővárosi templomban a Virág Benedek Kórus és Martonné Németh Mária matematikatanár, orgonaművész hangversenyében gyönyörködhettünk. Április 8-án délelőtt a tanulók a versenydolgozatot írták, délután a versenybizottság értékelte a dolgozatokat. Ennek munkáját dr. Hortobágyi István (ELTE) irányította. Este a beregszászi Illyés Gyula Magyar Nemzeti Színház előadásában Csehov egyfelvonásosokat láthattak a vendégek. Április 9-én, hétfőn egész napos kirándulások szolgálták Magyarország jobb megismerését. Április 10-én volt az ünnepélyes eredményhirdetés és díjkiosztás.

Az egyes osztályok versenyében a díjazottak a következők voltak:

9. osztály

I. díjasok:

– Kórus Péter, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.

– Kocsis Albert Tihamér, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.

II. díjasok:

– Dányádi Zsolt, Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.
– Balogh László, Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn.
– Nedeczky Gábor, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn.
– Hegyháti Máté, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.
– Peres Sámuel, Dunaszerdahely, Magyar Tanítási Nyelvű Gimn.

III. díjasok:

– Pál Ágnes, Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn.
– Doba Viktor, Arad, Csiky Gergely Líceum
– Sümeghy Tamás, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn.
– Zsuga Sándor, Kecskemét, Bányai Júlia Gimn.
– Toldi Bence, Miskolc, Földes Ferenc Gimn.

10. osztály

I. díjasok:

– Nagy Zoltán Lóránt, Budapest, Fazekas Mihály Gyak. Gimn.
– Kalcsú Áron, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn.
– Koltai Péter, Komárom, Selye János Gimn.

II. díjasok:

– Bartha Ferenc, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.
– Nagy Gábor, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn.
– Bergmann Gábor, Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.
– Héri István, Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn.

III. díjasok:

– Szalai Attila, Szeged, Radnóti Miklós Gimn.
– Tölgyesi Csaba, Kecskemét, Bányai Júlia Gimn.
– Szilágyi Zoltán, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll.

11. osztály

I. díjasok:

– Balogh János, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn.
– Koreck Ferenc, Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.

II. díjasok:

– Kovács Erika Renáta, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn.
– Jesch Dávid, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.

III. díjasok:

– Siroki László, Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.
– Spanczér Ilona, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.
– Reiss Attila, Kecskemét, Bányai Júlia Gimn.

12. osztály

I. díjasok:

– Nagy Tamás, Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn.
– Veres Péter, Székelyudvarhely, Tamási Áron Gimn.
– Vörös László, Győr, Révai Miklós Gimn.

II. díjasok:

– Nagy Dávid, Debrecen, Fazekas Mihály Gimn.
– Mezei Tímea, Sepsiszentgyörgy, Székely Mikó Koll.
– Bartha Tamás, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.

III. díjasok:

– Dávid Róbert, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.
– Vajda Péter, Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn.
– Molnár Zoltán, Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn.
– Magyari Karola, Csíkszereda, Márton Áron Gimn.

A versenyen a következő feladatokat kellett a versenyzőknek megoldaniuk:

9. osztály

1. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra. Az AB és AD oldal E és F felezőpontjából merőlegest állítunk a szemközti CD és CB oldalegyenesekre. Mutassuk meg, hogy a két merőleges az AC átlón metszi egymást!

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

2. Adjuk meg mindazokat a pozitív egész x, y, z számhármasokat, amelyekre

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2001.$$

Oláh György, Rév-Komárom

3. Lefedhető-e az 5 cm sugarú körlap 3 olyan kisebb körlappal, amelyek sugarai 2, 3 és 4cm?

Szabó Magda, Szabadka

4. A kétjegyű számokat 35-től 42-ig egymás mellé írjuk tetszés szerinti sorrendben. Hány prímszám van az így kapható számok között?

Balázsi Borbála, Beregszász

5. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek 4 pozitív egész osztója van, és ezen osztóinak összege 108.

Maus Pál, Budapest

6. Egy nemzetközi labdarúgótornán minden csapat minden csapattal pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén a csapatok pontszámainak összege 15 pont volt. Az utolsó helyezett 1 pontot gyűjtött, az utolsó előtti egyszer sem kapott ki. Hány pontot gyűjtött a második helyen végzett csapat?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

10. osztály

1. Adott a síkban az $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) konvex sokszög, amelynél az A_kA_{k+1} oldal hossza a_k ($A_{n+1} \equiv A_1$). Vetítsük merőlegesen a sokszöget az A_kA_{k+1} oldalának egyenesére és jelöljük a vetület hosszát d_k-val ($k = 1, 2, ..., n$)! Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + ... + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Szabó Magda, Szabadka

2. Határozzuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek oldalai egész számok és területének mérőszáma háromszorosa kerülete mérőszámának.

Oláh György, Rév-Komárom

3. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság talppontja D. Az ADC és BDC háromszögekbe írható körök sugara r_1 és r_2. Fejezzük ki az ABC háromszögbe írható kör r sugarát r_1 és r_2 segítségével!

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

4. Az A halmaz a pozitív egész számokat tartalmazza 1-től 2001-ig bezárólag. Megadható-e néhány A_i ($i = 1, 2, ..., n$; $n \geq 2$) részhalmaz úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

a) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$;

b) $A_i \cap A_j = \emptyset$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., n$;

c) az A_i ($i = 1, 2, ..., n$) halmazban a számok közül a legnagyobb egyenlő az összes többi szám összegével.

Balázsi Borbála, Beregszász

5. Oldjuk meg az egyenletet, ha x egész szám:

$$\frac{1}{x^2 - 4x - 1} + x(x-1)^3 = x^3 + 4x^2 - \frac{21}{4}x.$$

Bíró Bálint, Eger

6. Az $1, 2, 3, ..., 2n-1, 2n$ számokat két egyenlő csoportra osztjuk. Legyenek $a_1 < a_2 < ... < a_n$ az egyik, $b_1 > b_2 > ... > b_n$ a másik csoport elemei nagyság szerint növekvő, illetve csökkenő sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n| = n^2.$$

Dr. Pintér Ferenc, Nagykanizsa

11. osztály

1. Hány megoldása van az $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2001}$ egyenletnek az egész számok körében?

Szabó Magda, Szabadka

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T. Mekkora az ABC, ATC és BTC háromszögekbe írható körök sugarainak összege, ha $TC = 5$ cm?

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

3. Az a, b, c oldalú ABC háromszög szögei α, β, γ. Igazoljuk, hogy ha $3\alpha + 2\beta = 180°$, akkor $a^2 + bc - c^2 = 0$.

Dr. Pintér Ferenc, Nagykanizsa

4. Hány különböző szám van a következő 2001 szám között?

$$\left[\frac{1^2}{2001}\right], \left[\frac{2^2}{2001}\right], \left[\frac{3^2}{2001}\right], \ldots, \left[\frac{2001^2}{2001}\right]$$

($[x]$ jelöli az x szám egészrészét, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely x-nél még nem nagyobb.)

Dr. Katz Sándor, Bonyhád

5. Adott a síkon 2001 pont és egy egységnyi sugarú körvonal. Bizonyítsuk be, hogy található a körvonalon olyan pont, amelytől az adott pontokig mért távolságok összege legalább 2001!

Balázsi Borbála, Beregszász

6. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[\frac{4}{5}; 1\right]$, akkor

$$\frac{3-\sqrt{1-x_1^2}}{x_2+4} + \frac{3-\sqrt{1-x_2^2}}{x_3+4} + \ldots + \frac{3-\sqrt{1-x_n^2}}{x_1+4} \geq \frac{n}{2}.$$

Bencze Mihály, Brassó

12. osztály

1. Egy k körvonal A pontjában merőlegest állítunk a kör síkjára, és megjelöljük ezen az egyenesen az A-tól különböző B pontot. Kössük össze ezután B-t a körvonal valamely tetszőlegesen választott M pontjával, és tekintsük az A pontnak a BM egyenesre eső P merőleges vetületét! Mi lesz a P pontok halmaza (mértani helye), ha M végigfut a k körön?

Dr. Kántor Sándor, Debrecen

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapja a, szárai b hosszúságúak. Tudjuk, hogy $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Határozzuk meg szárak által bezárt szög nagyságát!

Bogdán Zoltán, Cegléd

3. Melyik n természetes szám esetén van a

$$\left(2+x^2\right)^n + \left(2+\frac{1}{x^2}\right)^n = 18$$

egyenletnek legtöbb valós gyöke? (Csak a különböző gyököket számoljuk.)

Dáné Károly, Marosvásárhely

4. Bizonyítsuk be, hogy hat egymás után következő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy pozitív egész szám ötödik hatványával egyenlő!

Szabó Magda, Szabadka

5. Bizonyítsuk be, hogy páratlan azoknak az (a, b, c, d, e) pozitív egész számokból álló rendezett számötösöknek a száma, amelyekre az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$ egyenlőség teljesül!

Erdős Gábor, Nagykanizsa

6. Legyen O az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos sokszög köré írt kör középpontja. Adjuk meg a $B_k \in OA_k$ pontokat úgy, hogy

$$OB_k = \frac{OA_k}{n-k+1}(k = 1,2,\ldots,n-1)$$

teljesüljön. Igazoljuk, hogy a $B_1B_2\ldots B_{n-1}A_n$ sokszög területe egyenlő az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög területének az n-ed részével!

Bencze Mihály, Brassó

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2001. november 30.

180. Tíz egyforma érmét elhelyeztünk egy körvonal mentén úgy, hogy mindegyik érmén a „fej" van felül. A következő két mozgatás megengedett:
(1) négy szomszédos érmét megfordítunk;
(2) öt szomszédos érme közül a középsőt változatlanul hagyjuk, a többi négyet megfordítjuk.

A fenti változtatások véges sokszori alkalmazásával elérhető-e, hogy mind a tíz érmén az „írás" legyen felül?

181. Egy F fókuszpontú parabolához egy külső P pontból két érintőt húzunk, az érintési pontok E_1 és E_2. Bizonyítsuk be, hogy a PF szakasz hossza az FE_1 és FE_2 szakaszok hosszának mértani közepe!

Fitos László, Esztergom

182. Az ABC hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ. Mutassuk meg, hogy a következő három másodfokú egyenlet mindegyikének gyökei valósak:

$$2x^2\cos\alpha + x\cos(\alpha-\beta) + \cos\beta\cos\gamma = 0$$
$$2x^2\cos\beta + x\cos(\beta-\gamma) + \cos\gamma\cos\alpha = 0$$
$$2x^2\cos\chi + x\cos(\gamma-\alpha) + \cos\alpha\cos\beta = 0$$

Bencze Mihály, Brassó

183. A, B és C a sík három pontja. Szerkesszünk olyan C-re illeszkedő egyenest a síkon, amelyre nézve teljesül, hogy az A és B pontoktól vett távolságának szorzata maximális!

184. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n esetén érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}!$$

Feladatmegoldások (165-169. feladatok)

165. Megadható-e 2001 darab különböző pozitív egész szám úgy, hogy összegük megegyezzen legkisebb közös többszörösükkel?

I. megoldás: A válasz a feladat kérdésére: igen, megadható 2001 darab megfelelő szám.
Vegyük először az 1, 2, 3 számokat. Ezekre $1 + 2 + 3 = 6$ és $[1, 2, 3] = 6$. 6-tal szorozva $36 = 6 + 12 + 18 = 1 + 2 + 3 + 12 + 18$ és $[1, 2, 3, 12, 18] = 36$.

A fenti példa adja az ötletet a 2001 darab szám egy lehetséges konstrukciójához. 6-tal szorozgatva a számok száma mindig kettővel nő, így elérhető, hogy 2001 darab megfelelő számunk legyen. A 6-tal való szorozgatás következtében az összeg is, a legkisebb közös többszörös is hatszorosára nő egy lépés során. A 2001 darab megfelelő szám tehát: $1;\ 3^i\cdot 2^{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 999)$; $3^{i+1}\cdot 2^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 999)$.

Ezen számok legkisebb közös többszöröse $2^{1000}\cdot 3^{1000}\cdot 6^{1000}$, összege pedig

$$1+2\cdot\sum_{i=0}^{999}6^i+3\cdot\sum_{i=0}^{999}6^i = 1+5\cdot\frac{6^{1000}-1}{5} = 6^{1000}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

Megjegyzés: Ezzel a módszerrel több alkalmas konstrukciót is előállított

Schuler László (Budapest).

II. megoldás: Jelölje N a 2001 darab különböző pozitív egész szám legkisebb közös többszörösét, és legyen $N = 2^{1000} \cdot b$, ahol b alkalmasan megválasztandó páratlan pozitív egész.

Tegyük fel, hogy az $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{1000}, b, b \cdot 2, b \cdot 2^2, b \cdot 2^3, \ldots, b \cdot 2^{999}$ számok teljesítik a feladat feltételét. Legkisebb közös többszörösük N, összegükre nézve pedig teljesülnie kell, hogy $2^{1001} - 1 + b \cdot (2^{1000} - 1) = b \cdot 2^{1000}$,ahonnan $b = 2^{1001} - 1$. Ezzel a b értékkel tehát a fent megadott számok a feladat követelményének megfelelő konstrukciót adnak.

Nagy Béla, Sarkad

III. megoldás: Azt mutatjuk meg, hogy minden olyan 3-nál nem kisebb pozitív egész n esetén, amely nem írható fel két szomszédos pozitív egész szorzataként, megadható n darab, a feladat feltételének megfelelő különböző pozitív egész szám. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n},$$

ahonnan

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n}=1. \qquad (1)$$

Jelölje az (1) bal oldalán levő törtek nevezőinek legkisebb közös többszörösét A. (1)-et A-val szorozva kapjuk, hogy

$$\frac{A}{1\cdot 2}+\frac{A}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{A}{(n-1)\cdot n}+\frac{A}{n}=A,$$

ahonnan látszik, hogy az

$$\frac{A}{1\cdot 2},\frac{A}{2\cdot 3},\ldots,\frac{A}{(n-1)\cdot n},\frac{A}{n},$$

számok megfelelnek. Mivel $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ nem áll elő két szomszédos pozitív egész szorzataként, ezért $n = 2001$ helyettesítéssel egy alkalmas konstrukciót kapunk.

László Sándor, Szombathely

Általánosítás: Az I. megoldás módszere alapján belátható, hogy bármely $N \geq 3$ esetén megadható a feladat feltételének megfelelően N darab különböző pozitív egész szám. Ha $N = 2k + 1$ (k pozitív egész), akkor az

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{ha } n=1\\ 2\cdot 6^{n-2}, & \text{ha } 2\le n\le k+1\\ 3\cdot 6^{n-k-2}, & \text{ha } k+2\le n\le 2k+1\end{cases}$$

képlettel megadott N darab különböző pozitív egész szám összege is és legkisebb közös többszöröse is 6^k. Ha $N = 2k + 2$ (k pozitív egész), akkor az

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{ha } n=1\\ 4, & \text{ha } n=2\\ 5, & \text{ha } n=3\\ 10, & \text{ha } n=4\\ 40\cdot 6^{n-5}, & \text{ha } 5\le n\le k+3\\ 60\cdot 6^{n-k-4}, & \text{ha } k+4\le n\le 2k+2\end{cases}$$

képlettel megadott N darab különböző pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse $20 \cdot 6^{k-1}$, összege pedig

$$20+\sum_{i=1}^{k-1}40\cdot 6^{i-1}+\sum_{i=1}^{k-1}60\cdot 6^{i-1}=$$

$$=20+20\cdot\sum_{i=1}^{k-1}(6-1)\cdot 6^{i-1}=20\cdot 6^{k-1},$$

ami azt jelenti, hogy teljesíti a feladat feltételét.

Dályay Pál Péter, Szeged

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 7.

166. Az f: $N \to N$ függvényre $f(1)=1$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n+1)= f(2n)+1$ bármely pozitív egész n esetén. Határozzuk meg az f függvény maximumát, ha $1 \leq n \leq 2001$!

Megoldás: Néhány konkrét n esetére kiszámítva f értékét észrevehető, hogy $f(n)$ az n kettes számrendszerbeli alakjában előforduló 1-esek száma.

Ha $n = 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$ (a_i 0 vagy 1, i=0, 1, 2, ..., $k - 1$; k természetes szám), akkor $2n = 2^{k+1} + a_{k-1} \cdot 2^k + \ldots + a_1 \cdot 2^2 + a_0 \cdot 2^1$, azaz $f(2n) = f(n)$, hiszen az 1-esek száma nem változott. Az is látható, hogy $2n+1$ felírásához egy darab 1-essel többre van szükség, azaz $f(2n+1) = f(2n) + 1$ is teljesül.

$f(n)$értéke adott intervallumon akkor maximális, ha az n kettes számrendszerbeli alakjában minden számjegy 1-es. Ekkor $n = 2^l - 1$ (l pozitív egész) és $f(n) = l$.

Mivel $1 \le n \le 2001$, ezért $n = 2^{10} - 1$ esetén lesz $f(n)$ maximális ($2^{11} - 1 = 2047 > 2001$), a maximum 10.

Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzések:

1. Az adott intervallumban $f(n)$ értéke még három helyen 10 lesz, nevezetesen 1535, 1791 és 1919 esetén. Ezen számok kettes számrendszerbeli alakja tizenegy jegyű, és pontosan az egyik jegy 0.

2. A fenti gondolatmenet alapján belátható, hogy

$$\max_{1 \le n \le p} f(n) = \lfloor \log_2(p+1) \rfloor.$$

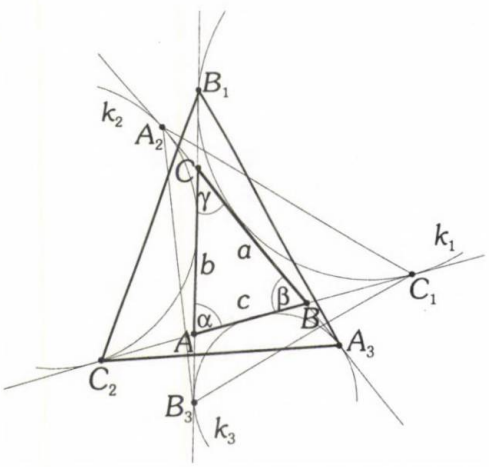
Dályay Pál Péter, Szeged
Kiss Géza, Kisújszállás

A megoldók száma: 11.

167. Az ABC háromszögben a BC, CA, AB oldalakhoz hozzáírt körök rendre k_1, k_2, k_3. A BC egyenes a k_2 kört az A_2, a k_3 kört az A_3 pontban, a CA egyenes a k_1 kört a B_1, a k_3 kört a B_3 pontban, az AB egyenes a k_1 kört a C_1, a k_2 kört a C_2 pontban érinti. Igaz-e, hogy az $A_2B_3C_1$ és az $A_3B_1C_2$ háromszögek területe egyenlő?

Bíró Bálint, Eger

Megoldás: Az ABC háromszög oldalainak hosszát jelölje a szokásos módon a, b és c, a szögeket pedig α, β, γ.



Ha $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, akkor az érintőszakaszok egyenlőségéből adódóan

$$AB_1 = AC_1 = BA_2 = BC_2 = CA_3 = CB_3 = s,$$
$$BA_3 = CA_2 = s - a, \quad AB_3 = CB_1 = s - b,$$
$$AC_2 = BC_1 = s - c.$$

Az $A_2B_3C_1$ és $A_3B_1C_2$ háromszögek területét felírhatjuk a következőképpen:

$$T_{A_2B_3C_1} = T_{AB_3C_1} + T_{BC_1A_2} + T_{CA_2B_3} + T_{ABC} \quad (1)$$

$$T_{A_3B_1C_2} = T_{AB_1C_2} + T_{BC_2A_3} + T_{CA_3B_1} + T_{ABC} \quad (2)$$

(1) jobb oldalán az első három tag összege (az ABC háromszög területéhez képest a többlet):

$$\frac{s(s-b)\sin\alpha}{2} + \frac{s(s-c)\sin\beta}{2} + \frac{s(s-a)\sin\gamma}{2} =$$

$$= \frac{s}{2}\left[s(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) - \right.$$
$$\left. -(b\sin\alpha + c\sin\beta + a\sin\gamma)\right].$$

Hasonlóan adódik, hogy (2) jobb oldalán az első három tag összege:

$$= \frac{s}{2}\left[s(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) - \right.$$
$$\left. -(c\sin\alpha + a\sin\beta + b\sin\gamma)\right].$$

A sinustétel értelmében $a\sin\beta = b\sin\alpha$, $b\sin\gamma = c\sin\beta$, $c\sin\alpha = a\sin\gamma$, így

$$T_{AB_3C_1} + T_{BC_1A_2} + T_{CA_2B_3} =$$
$$= T_{AB_1C_2} + T_{BC_2A_3} + T_{CA_3B_1},$$

ami az állítást bizonyítja.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 11.

168. Az a_0, a_1, a_2, ... valós számsorozatra teljesül, hogy $|a_n| = a_{n-1} + a_{n+1}$ bármely pozitív egész n esetén. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat periodikus! Határozzuk meg az a_{2001} értékét, ha $a_0 = 2000$ és $a_1 = 2001$!

Megoldás: Könnyen látható, hogy a sorozatnak végtelen sok nemnegatív tagja van, vegyünk egy ilyen tagot. Mivel ez a két szomszédos tag összegével egyenlő, ezért a két szomszéd közül az egyik ugyancsak nemnegatív. Biztosan van tehát két szomszédos nemnegatív tag a sorozatban, jelölje őket a_m és a_{m+1}. Ekkor

$$a_{m-1} = a_m - a_{m+1} \quad \text{és} \quad a_{m+2} = a_{m+1} - a_m.$$

A fenti két különbség közül valamelyik nemnegatív, ezért biztosan van a sorozatban három egymást követő nemnegatív elem.

Legyen a rekurzív definíciónak megfelelően a három egymást követő nemnegatív tag rendre a, $a + b$, b ($a, b \geq 0$). Az a és b közötti nagyságrendi viszonynak megfelelően két eset lehetséges:

1. $a \leq b$. Ekkor a sorozat mindkét irányban egyértelműen folytatható: ..., b, $2b - a$, $b - a$, $-b$, a, $a + b$, b, $-a$, $a - b$, b, $2b - a$, ...

2. $a \geq b$. Ekkor a mindkétirányú folytatás: ..., $2a - b$, a, $b - a$, $-b$, a, $a + b$, b, $-a$, $a - b$, $2a - b$, a, ...

Látható, hogy a sorozat valóban periodikus, a periodus hossza 9, azaz $a_{n+9} = a_n$ ($n \in N$). A fentiek alapján $a_{2001} = a_3$. Mivel $a_2 = a_1 - a_0 = 1$, ezért $a_3 = a_2 - a_1 = -2000$, vagyis $a_{2001} = -2000$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 8.

169. Melyek azok az $f: R \to R$ folytonos függvények, amelyekre minden valós x esetén teljesül az $f(f(f(x))) - 2f(f(x)) + 2f(x) - x = 0$ függvényegyenlet?

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Az egyszerűbb írásmód végett vezessük be az

$$\underbrace{f\left(f\ldots\left(f\left(x\right)\right)\right)}_{n\text{-szer}} = f^{(n)}(x)$$ jelölést.

Ha egy $f: R \to R$ folytonos függvény igazzá teszi az egyenlőséget, akkor az alábbiak teljesülnek rá:

(1) f injektív.

Ugyanis, ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$$f^{(2)}(x_1) = f^{(2)}(x_2) \text{ és } f^{(3)}(x_1) = f^{(3)}(x_2)$$

is fennállnak, és így

$$f^{(3)}(x_1) - 2f^{(2)}(x_2) + 2f(x_1) - x_1 =$$
$$= f^{(3)}(x_2) - 2f^{(2)}(x_2) + 2f(x_2) - x_2 = 0$$

miatt $x_1 = x_2$.

(2) f szigorúan monoton.

Ugyanis, ha nem lenne az, akkor találnánk olyan $a < b < c$ valós számokat, amelyekre sem $f(a) < f(b) < f(c)$, sem pedig $f(a) > f(b) > f(c)$ nem teljesülne. Legyen például $f(a) < f(c) < f(b)$. Ekkor az f az $[a; c]$ intervallumon felveszi a maximumát (zárt intervallumon folytonos), de nem az intervallum végpontjaiban, ugyanis $f(b)$ nagyobb $f(a)$-nál is és $f(c)$-nél is. Legyen ez a maximumhely d ($a < d < c$). Ekkor f az $[a; d]$ intervallumon felvesz minden $f(a)$ és $f(d)$ közötti értéket, nevezetesen $f(c)$-t is. Ez viszont ellentmond (1)-nek, mert az $[a; d]$ -on kívül eső c helyen is $f(c)$ a függvényérték.

Hasonlóan megy a bizonyítás más, a szigorú monotonitásnak ellentmondó reláció esetében is.

Tegyük fel először, hogy az f szigorúan növő. Alakítsuk a feltételt:

$$f^{(3)}(x) + 2f(x) = 2f^{(2)}(x) + x.$$

Ha most x helyére $f(x)$ -et írunk, akkor kapjuk, hogy

$$f^{(4)}(x) + 2f^{(2)}(x) = 2f^{(3)}(x) + f(x).$$

Ez utóbbi egyenletbe helyettesítsük be a $2f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) + 2f(x) - x$ kifejezést. Rendezés után kapjuk, hogy $f^{(4)}(x) + f(x) = f^{(3)}(x) + x$.

Ha lenne olyan x valós szám, amelyre $x < f(x)$ teljesülne, akkor a szigorú növekedés miatt $f(x) < f^{(2)}(x)$, $f^{(2)}(x) < f^{(3)}(x)$ és $f^{(3)}(x) < f^{(4)}(x)$ is fennállna. Ekkor viszont $f^{(4)}(x) + f(x) > f^{(3)}(x) + x$ teljesülne, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Hasonlóan adódik, hogy ha valamely x valós számra $x > f(x)$ teljesülne, akkor $x + f^{(3)}(x) > f(x) + f^{(4)}(x)$ lenne igaz, ami nem lehetséges. Ebből viszont következik, hogy $f(x) = x$ minden valós x esetén. Ez a függvény teljesíti a feladat feltételeit.

Abból a feltételezésből, hogy f szigorúan csökkenő, a fentihez hasonló gondolatmenettel szintén az $f(x) = x$ megoldásra jutnánk, ami azt mutatja, hogy a függvényegyenletnek szigorúan csökkenő megoldása nincs.

Kaptuk tehát, hogy a feltételeknek egyetlen függvény tesz eleget:

$$f: R \to R, f(x) = x.$$

Schmidt Edit, Budapest

A megoldók száma: 6.

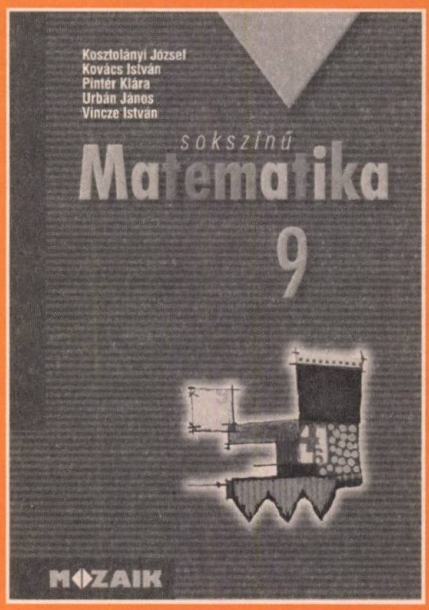
A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (166., 167.); Dályay Pál Péter, Szeged (165-169.); Kiss Géza, Kisújszállás (166., 167.); László Sándor, Szombathely (165-168.); Nagy Béla, Sarkad (165-169.); Schmidt Edit, Budapest (165-169.); Schuler László, Budapest (165-169.); Simon József, Csíkszereda (166-168.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (165-169.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (165-169.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (166., 167.).

KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

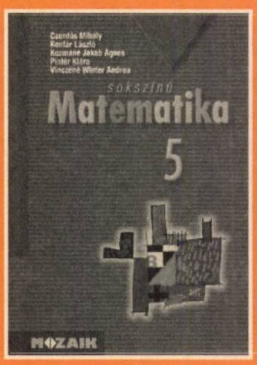
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

színes tankönyvsorozat 2001-ben az 5. és 9. osztályos kötetekkel indul. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.



A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

KÖNYVAJÁNLAT A MATEMATIKA TANÍTÁSÁHOZ



MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

2

Héron képlete II.

(Udvari Tibor)

Gazdasági feladatok a középfokú matematika tanításában

(Takács Tímea)

Gondolatok a matematika-tankönyvekről egy megjelenő tankönyvcsalád kapcsán

(Vincze István)

IX. ÉVFOLYAM 2001 5

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 980 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Héron képlete II.
Udvari Tibor tanár, Baja

Gazdasági feladatok a középfokú matematika tanításában
Takács Tímea tanár, Budapest

Kiss Sándor:
A háromszög nevezetes körei c. könyvről
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Felhívás!
Vegyen részt ön is a Bakos Tibor Matematikai Gyűjtemény munkájában!
Holló-Szabó Ferenc adjunktus, Budapest

Sokszínű matematika 6. osztály
Pintér Klára adjunktus, Szeged

Gondolatok a matematika-tankönyvekről egy megjelenő tankönyvcsalád kapcsán
Sokszínű matematika 10.
Vincze István tanár, Szeged

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Udvari Tibor

Héron képlete II.

Alkalmazások

Miután láttuk a tétel különböző bizonyítási lehetőségeit, nézzük most meg a képlet néhány alkalmazását is. Legegyszerűbb alkalmazása természetesen a terület kiszámítása az ismert oldalak alapján. Ennél azonban sokkal több esetben segíti munkánkat a képlet ismerete.

Leggyakrabban szélsőértékek meghatározásában alkalmazható, de például Pitagorasz tételének levezetésében is használhatjuk kiindulásként. Most csak azok közül válogassunk, amelyekben a képletnek lényeges szerepe van.

A közös oldallal rendelkező és egyenlő kerületű háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

Jelölje c a közös oldalt, és használjuk fel Héron képletének a következő alakját (a 8. bizonyításban szerepelt a levezetésben):

$$16t^2 = ((a+b)^2 - c^2)\cdot(c^2 - (a-b)^2)$$

Mivel a kerület és c ebben az esetben rögzített, $a+b$ értéke állandó. Ezért $16t^2$ csak a második tényezőtől függ, és nyilván akkor a legnagyobb, ha a második tényező a lehető legnagyobb. Ez pedig akkor teljesül, ha $(a-b)^2$ a lehető legkisebb. Négyzet legkisebb értéke 0 lehet, amit itt fel is vesz $a=b$ esetén. Tehát ekkor, vagyis egyenlő szárú háromszög esetén lesz a terület a lehető legnagyobb.

Adott kerületű háromszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

Mivel a kerület számértéke rögzített, így a kerület fele, s is rögzített érték. Tudjuk, hogy a területet a $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ képlet határozza meg. Használjuk fel ennek nem rögzített elemeire a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{3s-a-b-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{3s-2s}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$$

Egyenlőség csak akkor lehet, ha $s-a = s-b = s-c$, vagyis, ha $a = b = c$. Ebből már következik, hogy

$$t \le \sqrt{\frac{s\cdot s^3}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}},$$

és a maximális értéket a szabályos háromszög esetén veszi fel.

Adott területű háromszögek közül melyiknek a kerülete a legkisebb?

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével

$$\frac{s^3}{27} \ge (s-a)(s-b)(s-c),$$

ahol egyenlőség csak akkor lehet, ha $s-a = s-b = s-c$, vagyis, ha $a = b = c$.

Ennek alapján a kerület:

$$k = \frac{s}{2} = \sqrt[4]{\frac{s^4}{16}} \ge \sqrt[4]{\frac{s\cdot 27\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}{16}} = \sqrt[4]{\frac{27}{16}t^2},$$

és a minimális értéket a szabályos háromszög esetén veszi fel.

Bizonyítsuk be Pitagorasz tételét!

Legyen egy derékszögű háromszög két befogója a és b, átfogója c. Héron képlete alapján $t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ teljesül minden háromszögre, tehát erre a háromszögre is. (Lényeges, hogy a képletet Pitagorasz tételének felhasználása nélkül vezessük le, ha ezt a bizonyítást is be akarjuk mutatni!) Derékszögű háromszög területe azonban a befogókból is kiszámítható:

$$t = \frac{ab}{2}.$$

Ezt a kifejezést helyettesítsük be Héron képletébe:

$$\frac{a^2b^2}{4} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Tudjuk, hogy $s = \frac{a+b+c}{2}$, behelyettesítve a következő egyenlőség adódik:

$$\frac{a^2b^2}{4} = \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}$$

$$4a^2b^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$4a^2b^2 = ((a+b)^2 - c^2)\cdot(c^2 - (a-b)^2)$$

$$4a^2b^2 = (2ab + (a^2+b^2-c^2))\cdot(2ab - (a^2+b^2-c^2))$$

$$4a^2b^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$$

Ez pedig csak akkor teljesülhet, ha $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, vagyis ha a befogók négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével.

Általánosítások

A képlet többféle általánosítást is kínál. Ha a síkban maradunk, akkor felmerülhet a kérdés, háromszögtől különböző síkidomokra lehet-e hasonló, csak az oldalaktól függő területképletet találni? Leghamarabb a négyszögek egyik csoportjára, a húrnégyszögekre vált ismertté egy hasonló képlet, amelyet felfedezőjéről Brahmagupta képletének is nevezünk. Formailag ez áll legközelebb az eddig vizsgált képlethez.

Húrnégyszög területe

Jelölje az *ABCD* húrnégyszög oldalait *a*, *b*, *c* és *d*, kerületének felét pedig *s*.

A húrnégyszög területét kiszámíthatjuk a $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ képlet alapján.

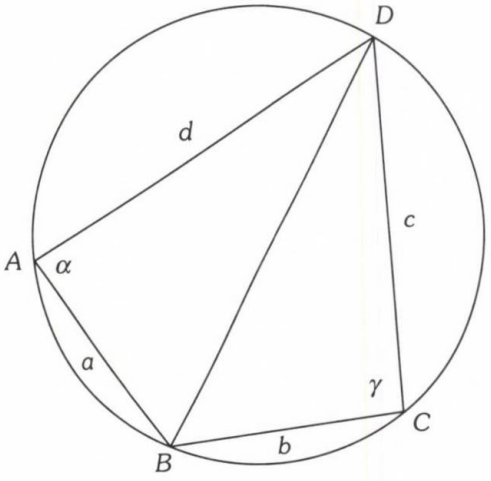
Látható, hogy $d=0$ feltételezéssel „elfajult" húrnégyszögként kapjuk meg a háromszöget, egyben az előző képlet is automatikusan az ismert képletté válik.

Bizonyítása sokban megegyezik a már megismert bizonyításokkal. Néhány ismert trigonometriai képletből kiindulva vezetjük most le.

Bizonyítás:

Jelölje a húrnégyszög két szemközti szögét α és γ. Mivel egymást 180°-ra egészítik ki, e két szög szinuszai megegyeznek, koszinuszaik pedig egymás ellentettjei. Húzzuk meg a húrnégyszög BD átlóját! A kapott két háromszög területének összege adja a húrnégyszög területét:

$$t = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin\alpha.$$



1. ábra

Ha mindkét háromszögben felírjuk a BD átlóra a koszinusztételt, a kapott kifejezések nyilván egyenlők, ezért

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

Mivel α kisebb 180°-nál,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right)^2}.$$

Most közös nevezőre hozás után többször is használhatjuk a nevezetes szorzatokat.

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4((ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)}{4(ad+bc)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{((a+d)^2-(b-c)^2)((b+c)^2-(a-d)^2)}{4(ad+bc)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{4(ad+bc)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{2(ad+bc)} =$$

$$= \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

A kapott kifejezést helyettesítsük vissza a terület képletébe, és megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Az általánosítás következő lépcsője annak megvizsgálása, hogy tetszőleges konvex négyszögre, amely nem feltétlenül húrnégyszög, lehet-e hasonló képletet találni? Az előző bizonyítást néhány lényeges esetben módosítani kell, hiszen az ott fellépő szögek szinuszaira és koszinuszaira érvényes összefüggések most nem lesznek igazak.

Tetszőleges konvex négyszög területe

Jelölje az *ABCD* tetszőleges konvex négyszög oldalait *a*, *b*, *c* és *d*, két szemközti szögét pedig α és γ. Ekkor a négyszög *t* területét kiszámíthatjuk a

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\varphi}$$

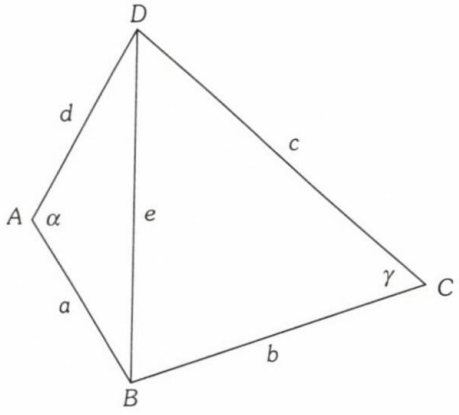
képlettel,

ahol $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ és $\varphi = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Húrnégyszög esetén $\varphi = 90°$, tehát $\cos\varphi = 0$. Ekkor visszakapjuk az előző képletet. Ha α és γ helyett a másik két szöget (β és δ) használjuk, ezek ψ számtani közepe φ-t 180°-ra egészíti ki, így koszinuszaik négyzete megegyezik. Ezért lényegtelen, melyik párt használjuk fel a számolás során.

Bizonyítás:

A négyszöget az *BD* átlója két háromszögre bontja. Ezért területét megkaphatjuk a két háromszög területének összegeként:



2. ábra

$$t = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\gamma \text{, amiből}$$

$$4t = 2ab\sin\alpha + 2cd\sin\gamma.$$

A *BD* átlóra felírva a koszinusztételt mindkét háromszögben,

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\gamma,$$

amiből

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\gamma.$$

Mindkét egyenlőségben a két oldal négyzetét véve

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 =$$

$$= 4a^2b^2\cos^2\alpha + 4c^2d^2\cos^2\gamma - 8abcd\cos\alpha\cos\gamma$$

$$16T^2 = 4a^2b^2\sin^2\alpha + 4c^2d^2\sin^2\gamma + 8abcd\sin\alpha\sin\gamma$$

Adjuk össze a két egyenlőség megfelelő oldalait:

$$16T^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) =$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} =$$
$$= 4(ab + cd)^2 - 16abcd\cos^2\varphi$$

Vagyis

$$16t^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\varphi$$

A jobb oldalon az első két tag ugyanaz, mint a húrnégyszög területképletének bizonyításában a négyzetgyök alatti tört számlálója. Ugyanazokkal a lépéseket itt is elvégezve kapjuk a bizonyítandó képletet:

$$t^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\varphi.$$

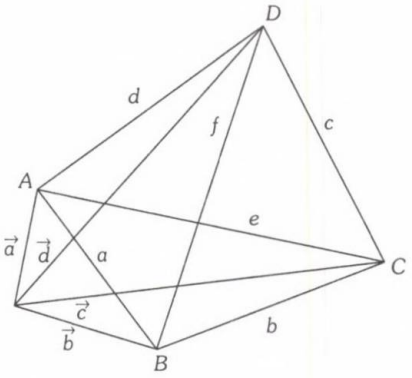
Ezt az eredményt Héron képletével összevetve úgy gondolhatjuk, hogy a szögek behozatala túlságosan nagy ár az általánosításért, hiszen így már nem csak az oldalaktól függ a terület. A szögek helyett azonban távolságokat is használhatunk. Az oldalak mellett a négyszög két átlójával próbáljuk meg kifejezni a területet. Olyan képletet kapunk, amely húrnégyszög és nem húrnégyszög esetén is egyforma. Ez a képlet az előbbi trigonometriai módszer kiegészítéseként is megkapható, ha az átlók és az előbbi szög közötti kapcsolatokat fejezzük ki. Levezethető azonban másként is, a vektoriális szorzat és a Lagrange-azonosság felhasználásával is. Érdemes megjegyezni azt is, hogy a Héron-képlet is felírható ehhez hasonló formában, $16t^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ alakban, tehát jogosan tekinthetjük az alábbi képletet képletünk kiterjesztésének.

Tetszőleges síknégyszög területe

Jelölje a, b, c és d a négyszög oldalait, e és f az átlóit. Ekkor a négyszög t területét kiszámíthatjuk a $16t^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$ képlettel.

Bizonyítás:

Az $ABCD$ négyszögben legyen $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=e$ és $BD=f$



3. ábra

Könnyű belátni, hogy ha a csúcsokon keresztül párhuzamosokat húzunk az átlókkal, olyan paralelogrammát kapunk, amelynek területe kétszerese a négyszög területének. Legyenek az A, B, C, D csúcsokba mutató helyvektorok rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

$$2t = \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \left|(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{d} - \vec{b})\right|$$

Négyzetre emelés után alkalmazzuk a Lagrange-azonosságot:

$$4t^2 = \left[(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{d} - \vec{b})\right]^2 =$$
$$(\vec{c} - \vec{a})^2(\vec{d} - \vec{b})^2 - \left[(\vec{c} - \vec{a})(\vec{d} - \vec{b})\right]^2$$

Alakítsuk át a második tagot:

$$4t^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2(\vec{d} - \vec{b})^2 - \left[\vec{c}\vec{d} - \vec{c}\vec{b} - \vec{a}\vec{d} + \vec{a}\vec{b}\right]^2 =$$
$$= (\vec{c} - \vec{a})^2(\vec{d} - \vec{b})^2 - \frac{1}{4}\left[-(\vec{c} - \vec{d})^2 + (\vec{b} - \vec{c})^2 + (\vec{d} - \vec{a})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2\right]^2$$

Most már rendre olyan vektorok szerepelnek csak az összefüggésben, amelyeknek mind a kezdő, mind a végpontja a négyszög valamelyik csúcspontja, tehát hosszuk az oldalakkal vagy átlókkal egyenlő. Ezeket az értékeket behelyettesítve és 4-gyel szorozva az egyenlőség mindkét oldalát, a bizonyítandóval egyenértékű kifejezést kapjuk:

$$16t^2 = 4e^2f^2 - (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2$$

Alkalmazások

Ahogyan a háromszögre vonatkozó képletnek több alkalmazása is van, ugyanúgy a négyszögekre kapott képleteink is további eredményekre vezethetnek. Nézzünk meg itt is néhány példát!

Adott a, b, c, d oldalú négyszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

Mivel $\cos^2\varphi$ értéke 0 és 1 között van,

$$16t^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) -$$

$$-abcd\cos^2\varphi \le (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

és az egyenlőség érvényesül $\cos^2\varphi=0$ esetén. Ez viszont azt jelenti, hogy $\varphi=90°$, vagyis $\alpha+\beta=180°$. Az adott *a, b, c, d* oldalakkal rendelkező négyszögnek akkor a legnagyobb a területe, ha húrnégyszög.

Ha az a, b, c, d oldalú négyszög egyidejűleg húrnégyszög és érintőnégyszög is, akkor területét a $t=\sqrt{abcd}$ *képlet adja meg.*

Mivel az érintőnégyszögek szemközti oldalainak összege megegyezik, $a + c = b + d$. Ebből következik, hogy

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = a+c = b+d..$$

Helyettesítsük be Brahmagupta képletébe felváltva az s helyére az előbbi két kifejezést:

$$t^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) =$$

$$= (a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d) =$$

$$= abcd$$

Adott területű négyszögek közül melyiknek a kerülete a legkisebb?

$$t^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) -$$

$$-abcd\cos^2\varphi \le (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \le \left(\frac{s-a+s-b+s-c+s-d}{4}\right)^4 = \left(\frac{2s}{4}\right)^4$$

Mivel 2*s* a négyszög kerülete, kaptuk, hogy

$$t^2 \le \frac{k^4}{256}.$$

Egyenlőség akkor lehet, ha egyrészt φ értéke 180°, vagyis a négyszög húrnégyszög, másrészt pedig, ha $a=b=c=d$ teljesül. Ezekből már megállapítható, hogy az adott területű négyszögek közül a négyzetnek van a legkisebb kerülete.

Adott kerületű négyszögek közül melyiknek a területe a legnagyobb?

Ez az előző állítás duálisa, és lényegében az ottani egyenlőtlenségek segítségével mutatható meg, hogy adott kerület esetén a terület lehetséges értéke felülről korlátos, ezt a korlátot a kerület segítségével fejezhetjük ki. Adott kerület esetén a négyzet területe lesz a legnagyobb.

További általánosítások

Ezek után természetesen felmerül az újabb kérdés: lehet-e ötszög, hatszög stb. Általánosabban tetszőleges *n*-szög esetére hasonló képletet találni? Ha a most látott formát követjük, és az oldalak mellett az átlókat is szerepeltetjük a képletben, akkor tetszőleges n-szög területére érvényes képleteket találhatunk. Ezek azonban egyre bonyolultabbak lesznek. Rédei László adott meg egy közös, a determinánsokat is alkalmazó egyszerűbb képletet (természetesen a determinánsok kifejtése után a képletek már nem lesznek igazán egyszerűek). Ha P_1, P_2, ... P_n jelöli az *n*-szög csúcspontjait, r_{ij} pedig a P_i és P_j csúcspontok távolságát, akkor a sokszög *t* területét megkaphatjuk a következő képlettel:

$$16t^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} r_{i,j}^2 & r_{i,j+1}^2 \\ r_{i+1,j}^2 & r_{i+1,j+1}^2 \end{vmatrix}$$

(ahol az indexek ciklikusan változnak, pl. $n+1 = 1$ a számítás során).

Ezzel lényegében tisztázódtak a síkbeli általánosítások (bár ez utóbbinak nem néztük meg a bizonyítását), áttérhetünk a következő, sokkal nehezebbnek látszó kérdésre: lehet-e térbeli ál-

talánosítása képletünknek? Mivel a Héron-képlet háromszögekre vonatkozik, kézenfekvő térben a háromszöghöz leginkább hasonlítható tetraéderekre feltenni először a kérdést. Ahogyan ezt a síknégyszögeknél is tettük, először speciális tetraédereket vizsgáljunk csak.

Merőleges szegletű tetraéder térfogata

Ha az *ABCD* tetraéder *D* csúcsából kiinduló *DA*, *DB*, *DC* élek páronként merőlegesek egymásra, valamint *a*, *b* és *c* jelöli az *AB*, *BC* és *CA* éleket, és

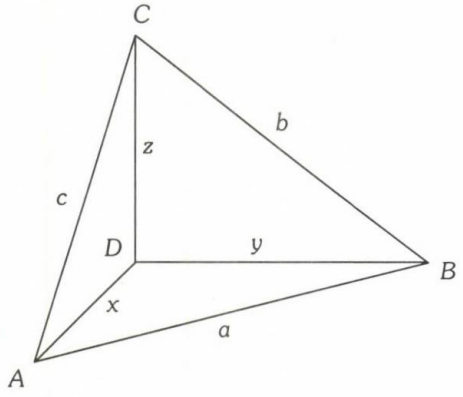
$$s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

akkor a tetraéder *V* térfogatára

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)}.$$

Bizonyítás:

Jelölje *x*, *y* és *z* rendre a *DA*, *DB* és *DC* éleket.



4. ábra

Ekkor Pitagorasz tétele szerint $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $c^2 = z^2 + x^2$, *ezért*

$$s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ezt felhasználva $x^2 = s^2 - b^2$, $y^2 = s^2 - c^2$, $z^2 = s^2 - a^2$.

Fejezzük ki most a térfogatot:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}xy\right)z = \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{6}\sqrt{x^2y^2z^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)(s^2 - a^2)}$$

Kitérő éleiben megegyező tetraéder térfogata

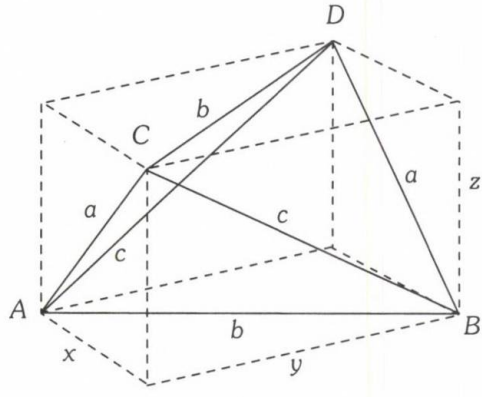
Ha az *ABCD* tetraéder egyik lapjának éleit *a*, *b* és *c* jelöli, és a szemközti (kitérő) élek megegyeznek, és

$$s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

akkor a tetraéder *V* térfogatára

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)}.$$

Bizonyítás:



5. ábra

A feltételeknek megfelelő tetraéder köré mindig írható olyan téglatest, amelynek a lapátlói a tetraéder éleit alkotják. Legyenek ennek a téglatestnek az élei *x*, *y* és *z*. Figyeljük meg, hogy most az eredeti tetraédert négy egybevágó, merőleges szegletű tetraéder egészíti ki téglatestté. Ezeknek a tetraédereknek az élei jelölésben megegyeznek az előző feladatban vizsgált tetraéder éleivel, ezért az ott tett megállapítások itt is felhasználhatók.

A térfogatot most kifejezhetjük a téglatest térfogatának és a négy egybevágó merőleges

szegletű tetraéder térfogatának különbségeként.

$$V = xyz - 4 \cdot \frac{1}{6} xyz = \frac{1}{3} xyz =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^2y^2z^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(s^2-b^2)(s^2-c^2)(s^2-a^2)}$$

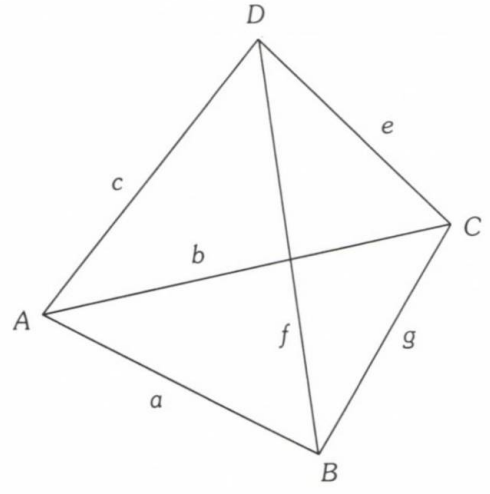
Mint látható, ezekben az esetekben sikerült Héron képletéhez hasonló eredményeket kapnunk a térfogatra. Az eredményben a tetraéder éleinek négyzetei szerepelnek mindkét esetben. Arra gondolhatunk, hogy az általánosabb esetben is lehet hasonló összefüggésekre jutnunk. Valóban így is van, de ennek bizonyítása már nehezebb, a vektorok vegyes szorzatára és a determinánsokra is szükségünk van elvégzéséhez.

Tetraéder térfogata

Jelölje V egy tetraéder térfogatát, *a*, *b*, *c* három, egy csúcsban összefutó élének hosszát, *e*, *f* és *g* pedig az ezekkel rendre szemben levő élek hosszát. Ekkor

$$144V^2 = 4a^2b^2c^2 + (b^2+c^2-e^2)(c^2+a^2-f^2)(a^2+b^2-g^2) -$$
$$-a^2(b^2+c^2-e^2)^2 - b^2(c^2+a^2-f^2)^2 - c^2(a^2+b^2-g^2)^2$$

Bizonyítás:



6. ábra

Legyenek

$\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$, $\vec{d}(d_1,d_2,d_3)$

az *ABCD* tetraéder csúcsaiba mutató helyvektorok. A tetraéder térfogatát például a D csúcsból a másik három csúcsba mutató vektorok vegyes szorzatával ki lehet fejezni.

$$V = \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$$

A vegyes szorzat felírható a vektorok koordinátáival determináns formájában is.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Vegyük a térfogat négyzetét!

$$V^2 = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$$

A második determináns első és ötödik oszlopát felcserélve, majd a determinánst a transzponáltjával helyettesítve adóik

$$V^2 = -\frac{1}{36} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{36} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ 1 & \vec{b}\vec{a} & \vec{b}\vec{b} & \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \\ 1 & \vec{c}\vec{a} & \vec{c}\vec{b} & \vec{c}\vec{c} & \vec{c}\vec{d} \\ 1 & \vec{d}\vec{a} & \vec{d}\vec{b} & \vec{d}\vec{c} & \vec{d}\vec{d} \end{vmatrix}$$

Mivel $a^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b}$, adódik

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} - a^2}{2},$$

és hasonlóan ki lehet fejezni a determinánsban

szereplő többi vektorszorzatot is. Helyettesítsük be ezeket a determinánsba, majd adjuk hozzá a második sorhoz, illetve oszlophoz az első sor, illetve oszlop $-\frac{\vec{a}\vec{a}}{2}$-szeresét, a harmadik sorhoz, illetve oszlophoz az első sor, illetve oszlop $-\frac{\vec{b}\vec{b}}{2}$ - szeresét és így tovább. Ezután a második, harmadik, negyedik és ötödik sort – 2-vel, az első oszlopot $-\frac{1}{2}$-del szorozva a térfogatra a következő kifejezés adódik.

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & g^2 & f^2 \\ 1 & b^2 & g^2 & 0 & e^2 \\ 1 & c^2 & f^2 & e^2 & 0 \end{vmatrix}$$

A determináns kifejtése után a bizonyítandóval egyenértékű kifejezést kapunk, amit a szorzások elvégzésével ellenőrizhetünk.

További képletek

Meg lehet fogalmazni a tetraéderre kapott eredményt az általános, n-szögre vonatkozó eredményhez hasonló alakban is. A tetraéder csúcsait P_1, P_2, P_3, P_4 jelölje, a P_i és P_j csúcsot összekötő él hosszát pedig r_{ij}. Ekkor a tetraéder V térfogatára

$$288V^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(-1)^{i+j+1}\begin{vmatrix} r_{i,j}^2 & r_{i,j+1}^2 & r_{i,j+2}^2 \\ r_{i+1,j}^2 & r_{i+1,j+1}^2 & r_{i+1,j+2}^2 \\ r_{i+2,j}^2 & r_{i+2,j+1}^2 & r_{i+2,j+2}^2 \end{vmatrix}$$

(ahol szintén ciklikusan változnak az indexek).

Az általánosítások egy másik formája, amikor az euklideszi geometria helyett hasonló képleteket keresünk a gömbi vagy a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria keretei között. Ezekben a háromszög területe arányos az ekszcesszussal, illetve defektussal, amelyeket a Héron-képletre emlékeztető kifejezésekkel lehet megadni.

Az ε gömbi ekszcesszus kiszámítására érvényes L'Huilier képlete, amely szerint:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}},$$

ahol s az elliptikus háromszög kerületének felét jelenti.

A háromszög δ defektusa kiszámítására érvényes a következő képlet, amelyben a, b, c a háromszög oldalai természetes mérőszámban kifejezve:

$$2\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} s \cdot \operatorname{sh}(s-a)\cdot \operatorname{sh}(s-b)\cdot \operatorname{sh}(s-c)}}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{c}{2}}$$

Irodalom

[1] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai

[2] Hajós György: Bevezetés a geometriába

[3] A. P. Juskevics: A középkori matematika története

[4] Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek

[5] Edward Kofler: Fejezetek a matematika történetéből

[6] Dr. Lévárdi László – Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok

[7] Dr. Pelle Béla: Geometria

[8] Pólya György: A problémamegoldás iskolája

[9] Pólya György: A plauzíbilis következtetés

[10] Reiman István: A geometria és határterületei

[11] Reiman István: Vektorok a geometriában

[12] Sain Márton: Matematikatörténeti ABC

[13] Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás

[14] Dirk J. Struik: A matematika rövid története

[15] Szász Pál: Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába

[16] B. L. van der Waerden: Egy tudomány ébredése

Takács Tímea

Gazdasági feladatok a középfokú matematika tanításában,

avagy egy lehetőség a realisztikus matematikatanításhoz való közelítésre

Hazánkban a középfokú oktatásban tanított matematikai ismeretek döntő többségében olyan elméleti tudást jelentenek, amelyek az iskolában megszokott szituációktól eltérő problémahelyzetekben alig hasznosulnak. Azok a tanulók, akik nem kifejezetten műszaki vagy tudományos pályát választanak, ez okból alig veszik hasznát az iskolában megszerzett matematikai ismereteiknek. Pedig a tanulók döntő többsége nem ilyen képzettséget igénylő pályára kerül.

A gyakorlatias ismeretanyagnak, a hétköznapokban hasznosítható, felhasználható tudás közvetítésének jelentősebb szerepet kellene kapnia a matematikatanításban. Nem véletlen, hogy külföldön sok helyen az oktatásban egyre nagyobb részt képvisel – az elméleti tudással szemben felértékelődött – a hétköznapokban is hasznos tudás. Különböző gyakorlati problémák megoldásához többféle irányban is könnyen továbbfejleszthető ismeretek, képességek, készségek alkalmazása tanítványaink későbbi életében legtöbbször nem elszigetelt szaktárgyi vonatkozásban merül fel. Természeti és társadalmi környezetünk, a valóságos élet egységes egész. Ezért a tanuló önkéntelenül is törekszik arra, hogy a tantárgyi keretben szerzett ismereteit integrálja, egységbe szervezze. Ez nem könnyű feladat. Természetesen elvárható tanáraitól, hogy lehetőleg minél több segítséget biztosítsanak ahhoz, hogy ez a folyamat sikeres legyen.

Az iskolai matematikatanítás eredményességének egyik fontos feltétele, hogy a szóba kerülő ismeretek a valóságból merített, gyakorlatias példák alapján kellően szemléltetve kerüljenek feldolgozásra. Ez a szemléltetés gazdasági feladatok alkalmazásával is történhet.

Másrészt azt is célszerű figyelembe venni, hogy a tanulók megismerési tevékenysége az iskolán, a tanítási órákon kívül is funkcionál. Az ismeretszerzés, a tudás megszerzése nem szűkíthető le az iskolai oktatás negyvenöt percére. Ezért indokolt azoknak a lehetőségeknek a kihasználása, amelyek a fejlesztő hatást a készségek kialakításának olyan szintézise során biztosítják, hogy gyakorlatias irányultságú ismeretanyagot dolgoznak fel. A gazdasági feladatok gyakorlatias jellege nyilván vitathatatlan.

Egy, a közelmúltban megjelent tanulmánykötet [1] az iskolai tudás és az oktatás minőségi fejlesztésének lehetőségét vizsgáló tanulmányokat tartalmaz. Ebben a kötetben a megtanult és megértett matematikatudás vizsgálatának eredményeit megelőzően, a nemzetközi tapasztalatok összefoglalásában szerepel, hogy „...az iskolai tudás nem feltétlenül segíti a hétköznapi problémák megoldását. Az iskolai matematika egyik gyakori bírálata az, hogy a tanult tudás csupán a begyakorolt helyzetekben használható, nem alkalmazható rugalmasan probléma-

megoldásra,..." [2] Ezen a helyzeten nyilván csak gyakorlatias irányultságú matematikai feladatok tudatosan válogatott, rendszeres alkalmazásával változtathatunk. Ennek tárgyi feltételei sajnos nem a legoptimálisabbak. Hiszen a mai magyar középiskolai matematika-tankönyvekben, feladatgyűjteményekben, példatárakban csak elvétve fordulnak elő a gyakorlati életből vett, hétköznapi problémákat megfogalmazó feladatok. Pedig tanítványaink személyiségének fejlesztéséből a matematika tanulására-tanítására háruló feladatokat nagy valószínűséggel hiányosan és egészen biztosan eltorzítva teljesítjük, ha figyelmünket csak a követelményként megfogalmazott ismeretekre (netán csak a minimum követelményekre) koncentráljuk. A tananyag követelmények között nem szereplő részeinek is jelentős szemléletformáló, logikus gondolkodást, problémamegoldó képességet, kreativitást (eredetiséget, problémaérzékenységet, ötletgazdagságot, rugalmasságot) fejlesztő szerepe van.

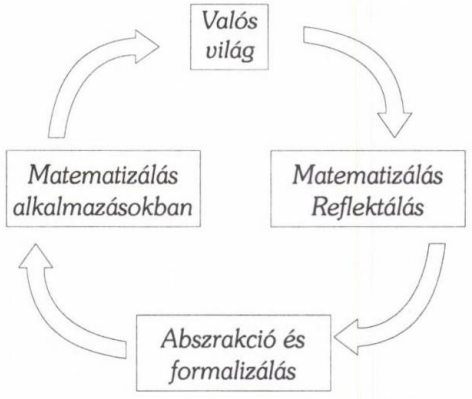
A gyakorlati problémák közül talán a legnagyobb jelentőséggel a gazdasági jellegű szituációk bírnak. Hiszen mindenkit foglalkoztat, hogy több lehetőség közül melyik fizetési ajánlatot érdemes elfogadni rövid, ill. hosszú távon, melyik befektetési lehetőséget érdemes kihasználni, melyik az előnyösebb hitelszerződés. Ezekkel a problémákkal élete során mindenki találkozik.

A gazdasági életben bekövetkezett változások szükségszerűvé teszik, hogy a tanulókat megismertessük bizonyos gazdasági fogalmakkal, bizonyos problémák megoldási módszereivel, az ehhez szükséges számítások elvégzésével. Ma a médiában, hirdetésekben egyre gyakrabban előfordulnak ilyen fogalmak, mint például kincstárjegy, diszkontjegy, limit, lízing, EBKM (egységesített banki kamatmutató), EHM (egységesített értékpapír hozammutató). Nem tekinthető feleslegesnek, ha középfokú végzettséget szerző tanulók is ismerik ezen fogalmak jelentését, ezekhez kapcsolódó gazdasági számítások elvégzésének módszereit.

Realisztikus matematikaoktatás

A realisztikus matematikaoktatás Hollandiában alakult ki Hans Freudenthal professzor irányításával. Ezen irányzat lehetőséget teremt arra, hogy a tanulók összekapcsolják az iskolában megszerzett tudományos ismereteiket a hétköznapokban megjelenő problémákkal. Erős motiváló hatása van, ha a valós világból vett példákon keresztül vezetünk be bizonyos matematikai objektumokat, majd a bevezetést követő formalizálás és absztrakció után ismét valódi kontextusok lesznek az elmélet alkalmazási területei. Az alkalmazás lehetőségének bemutatása, a hasznosság szemléltetése minden tanuló számára fontos. Hiszen a matematikai ismeretek alkalmazása nem csak azok számára fontos, akik nem tanulnak tovább a középfokú végzettség megszerzése után, mert a polgárok foglalkozását, életét egyre jobban áthatja a matematika. Egyre inkább a mechanikus készségek helyett az elemző készségek kerülnek előtérbe, így például az emberek egyre többször találkoznak grafikonokkal, statisztikai adatokkal szakmájuk és hétköznapjaik során egyaránt.

Realisztikus matematikaoktatás



Freudenthal szerin a matematikatanítás során az alapvető matematikai ismeretekhez úgy

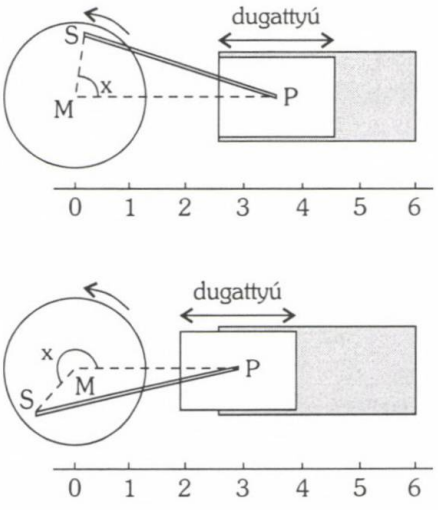
érdemes eljutni, hogy olyan jelenségekből, helyzetekből indulunk ki, amelyek felkeltik a tanulók érdeklődését, érdekesek, motiváló hatásúak. Ezek lehetnek éppúgy a hétköznapi életből vett jelenségek, mint a tanulók számára ismerős, elképzelhető, tisztán matematikai modellek is. Természetesen az ilyen matematikaoktatás változást kíván mind a tanár, mind a tanulók részéről. A tanárnak figyelnie kell, hogy a sok konkrét probléma között megmaradjon a matematikai struktúra. Fel kell készülnie, hogy egy adott problémára több eltérő válasz adható, esetenként a tanulók részéről szebb, elegánsabb megoldás hallható. A tanárnak a megismerő tanulási folyamatot irányító, segítő személlyé kell válnia.

A tanulóknak a passzív tanulási módot aktív tanulási móddá kell változtatniuk. Lehetőséget kapnak saját megoldási stratégiáik alkalmazására, ezek használatának indoklására. A tanulók egymás eredményeit összehasonlítják, ez lerövidítheti a tanulási folyamatot, tudatosítja a tanulókban a saját megoldásuk előnyeit és hibáit.

A tankönyveknek és feladatgyűjteményeknek is igazodniuk kell az effajta oktatáshoz. Bővíteni kell a könyveket olyan nyitott problémákat megfogalmazó példákkal, amelyekben a tanulók különböző eszközöket alkalmazhatnak, amelyek ösztönzik őket a gondolkodásra.

Természetesen a gyakorlati problémákkal kapcsolatos feladatoknak meg kellene jelennie a számonkérésben is, azaz a dolgozatfeladatok között, de legfőképpen a vizsgákon kellene ilyen jellegű feladatoknak szerepelnie. E nélkül a tanárok a formális feladatokat preferálják jobban, hiszen ez szerepel a vizsgákon, és a tanárnak erre kell felkészítenie a tanulókat. Összehasonlításképpen a trigonometria témaköréből nézzünk meg egy holland érettségi feladatot, és nézzük meg, hogy Magyarországon az elmúlt években ugyanezen témában milyen érettségi feladatokat jelöltek ki.

Holland érettségi feladat:



Egy dugattyú egy rúd segítségével össze van kötve egy forgó kerékkel. A kerék forgása során a dugattyú előre-hátra mozog. Legyen M a kerék középpontja, S pontban van a rúd rögzítve a kerékhez, míg P pontban a dugattyúhoz. PM távolság függ az x szögtől, legyen PM=a(x). MS=1, PS=4. A PMS szöget radiánban mérjük. A következő képlet minden x szögre érvényes.

$$a(x) = \cos x + \sqrt{16 - \sin^2 x}$$

1. *Bizonyítsd be a fenti formulát hegyesszögekre!*

2. *Egy teljes körülfordulás esetén két időpillanatban lesz PM egyenlő hosszú a rúddal. Mekkora a PMS szög ezekben a helyzetekben?*

Magyar érettségi feladatok:

Az egységesen használt „Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából" [3] Trigonometria fejezetének néhány feladata:

2921. Szakközépiskola, 1998.

Melyek azok a valós számok, melyekre igaz az alábbi egyenlőség?

$$\sin^2 x = \frac{\cos 2x}{2}$$

2968. Gimnázium, 1989.
Mely valós számokra igaz, hogy

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}?$$

3009. Szakközépiskola, 1992.
Mely valós számokra igaz, hogy

$$\sin 2x - \sin x = \frac{2}{9} tgx?$$

3027. Szakközépiskola, 1987.
Mely valós számokra igaz, hogy

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x?$$

3038. Gimnázium, 1985.
Mely valós számokra igaz, hogy

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2 (1 - \cos 2x) = 2?$$

3060. Gimnázium, 1991.
Mely valós számokra igaz, hogy

$$\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2?$$

Látható, hogy míg Hollandiában a számonkérésben is szerepet kapnak a gyakorlati feladatok, addig nálunk a pusztán formális ismereteket igénylő feladatokat helyezik előtérbe. Véleményem szerint a vizsgák megváltoztatásával hatékonyan lehetne befolyásolni a matematikaoktatást, nagyobb szerephez jutna a realisztikus matematikaoktatás.

A realisztikus matematikaoktatás lényeges jellemzője a fokozatos matematizálás, azaz hogy a tanulókat támogatni kell ismereteik pontosításában, fejlesztésében. Ezt segíti a horizontális és vertikális matematizálás.

A horizontális matematizálás folyamata során célunk, hogy a konkrét, realisztikus kontextusban felismertessük a matematikai tartalmat. Része e folyamatnak a sematizálás, a probléma megfogalmazása, szemléltetése különböző módokon, szabályszerűségek, relációk felfedezése, valós probléma áttranszformálása matematikai problémává vagy egy ismret matematikai modellbe.

A vertikális matematizálás folyamata során feladatunk a relációk képletben való kifejeztetése, szabályszerűségek bizonyítása, modellek finomítása, kombinálása, az általánosítás.

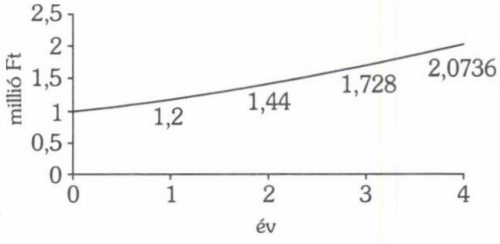
A realisztikus matematikaoktatásban a tanulók az informális, kontextusfüggő szintről a formális, szisztematikus szintre jutnak el. Ebben nyújtanak nagy segítséget a modellek, sémák, diagramok. Ahhoz, hogy a modellek betöltsék ösztönző szerepüket, fontos, hogy olyan kontextuson kell alapulniuk, amely könnyen elképzelhető, ismerős a tanulók számára, de emellett rugalmasnak is kell lenniük, hogy absztraktabb szinten is felhasználhassuk modelljeinket.

A logaritmus fogalmának kialakítása realisztikus módszerrel

A realisztikus matematikaoktatás szerint a matematikai elméletet a valós világból vett, konkrét szituáció alapján érdemes bevezetni. A logaritmus fogalmát a gazdasági életből vett példán keresztül is bevezethetjük.

Az alapszituáció az exponenciális növekedés, amelyet a kamatszámítás tökéletesen szemléltet. Az alábbi grafikon évi 20%-os kamat mellett mutatja az 1 millió Ft-os bankbetét változását.

1 millió Ft-os betét változása évi 20%-os kamat mellett



Miután elkészítettük a diákokkal a grafikont, ilyen kérdéseket tehetünk fel: „Hány év múlva lesz 1,2 millió Ft, 1,44 millió Ft stb. a bankbetét összege?"

Ezek után bevezethetünk egy, a szövegkörnyezettől függő definíciót: $\log_{1,2} 1,728$ jelenti azt az időmennyiséget, ami alatt az 1 millió Ft-os bankbetétből 1,728 millió Ft-os bankbetét lesz, ha az évi kamat 20%, azaz a változás faktora 1,2.

A logaritmus fontosabb tulajdonságait is a kontextus alapján érdemes megsejtetni. Például magyaráztassuk el a diákokkal, hogy az alábbi egyenlőségek miért teljesülnek:

$$\log_{1,2} 2 + 1 = \log_{1,2} 2,4$$

$$\log_{1,2} 3 + 1 = \log_{1,2} 3,6$$

$$\log_{1,2} 4 + \log_{1,2} 1,2 = \log_{1,2} 4,8$$

Így az első példa: ha a betét összege elérte a 2 millió Ft-ot, még egy év szükséges ahhoz, hogy 20%-os kamat mellett 2,4 millió Ft-ra növekedjen az összeg.

A példák segítségével eljutottunk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonossághoz ($\log_a x\, y = \log_a x + \log_a y$).

Természetesen az utolsó lépés az azonosság formális bizonyítása.

A tanulók egy része a formális ismereteket fogja használni, de lesznek olyanok, akik mindvégig a kontextushoz fogják kötni a feladatokat.

Miután a konkrét szituációból eljutottunk az absztrakció és formalizálás segítségével a matematikai struktúrához, az ismeretek alkalmazásakor célszerű ismét a való világból vett, gyakorlati feladatokat végeztetni. Így alakul ki a tanulókban egy egységes, összefüggő kép az új fogalommal, ismeretekkel kapcsolatban.

Gazdasági feladatok típusai

Csak matematikai és mindennapi ismereteket igénylő feladatok

Többféle olyan gazdasági eseményhez kapcsolható matematikai feladattípus létezik, amelynek megoldásához csupán matematikai ismeretek és esetleg csak a mindennapi életvitel tapasztalatai szükségesek.

A mindennapi életvitel tapasztalatain olyan ismereteket értve, amelyek semmiféle szakértelmet, előzetes tájékozódást nem igényelnek. Ezeknek az ismereteknek a halmazát talán azokkal a gazdasági feladatokban előforduló fogalmakkal lehet viszonylag könnyen körülírni, amelyek már nem elemei a halmaznak. Néhány ilyen jellemző fogalom: hozam, életjáradék, árfolyamnyereség, lízing, adókötelezettség, kötvény, részvény, befektetési jegy, adótőkeszámla, kamatos kamat.

A feladatok megoldásához felhasznált matematikai ismeretek közül a legjellemzőbbek (konkrétan azokat a témákat, témarészleteket említve, amelyek keretében tanított ismeretek felmerülnek): aránypárok, százalékszámítás, elsőfokú egyenletek-egyenletrendszerek, másod- és magasabbfokú egyenletek-egyenletrendszerek, halmazok kapcsolata, számelmélet.

Például:

Az öröklakások tulajdonosai az épület üzemeltetésével kapcsolatos díjakat gyakran az ún. tulajdoni hányad arányában fizetik. A tulajdoni hányadot a lakások alapterülete alapján számolják ki. Például Sütőék házában négy lakás van: két 86 m^2-es és két 52 m^2 -es. Számold ki a tulajdoni hányadot az egyes lakásokra! A 86 m^2 -es lakásban lakók havonta 4660 Ft vízdíjat fizetnek.

Mennyit fizetnek a kisebb lakásban lakók?

Kamat-, kamatoskamat-, járadékszámítás

E tárgykörbe tartozó gazdasági feladatok megoldása a kamatszámításhoz használatos százalékszámításon kívül már speciális matematikai ismeretek, eljárások felhasználását is igényli. A kamatoskamat- és a járadékszámítással

kapcsolatos feladatok megoldása néhány alapképlet ismeretét és több matematikai témakörben való jártasságot feltételez.

A legfontosabb alapképletek: a kamatos kamatokkal felnövekedett értéket, a járadék felnövekedett értékét, az annuitást (adott összegű, kamatlábú, időtartamú kölcsön törlesztésének időegységre jutó részlete) megadó összefüggések.

A feladatok megoldásához szükséges egyéb matematikai ismeretek a magasabbfokú egyenletek-egyenletrendszerek megoldási módszerei mellett a sorozatok, a hatványozás azonosságai, az exponenciális kifejezések, a logaritmus azonosságai témákat is érintik.

Például:

Tibort szülei azzal bízták meg, hogy megtakarított pénzük egy részét kösse le egy bankban. Tibor megtréfálta szüleit. A következő feladat formájában válaszolt arra a kérdésre, hogy mekkora összeget és milyen kamattal kötött le. A negyedik év végén kapott pénz és az első év elején lekötött összeg különbsége 72217 Ft, viszont a második év végén kapott és a betett pénz összege 271875 Ft. A kamatláb változatlan, évente egyszer van tőkésítés. Tibor mekkora összeget és milyen kamattal kötött le a bankban?

Kereslet-kínálat kapcsolatának vizsgálata

A gazdasági életben realizált értékesítés volumene nagyon sok tényezőtől függ. Többek között ilyenek: az előállítás (illetve beszerzés) költsége, finanszírozási, tárolási, szállítási, forgalmazási kiadások, más járulékos költségek. Ezek között több olyan is van, amelynek egységnyi termékre jutó része függ az összes termék mennyiségétől is. Mindezek figyelembe vétele statisztikai módszereket, valamint olyan optimum számításokat igényel, amelyekhez felsőfokú matematikai ismeretek (minimum az analízis anyaga) nélkülözhetetlenek. Ezért középfokon csak olyan egyszerűbb problémák felvetésére kerülhet sor, amelyek megoldásakor a függvényekről a középiskolában tanított ismeretek elegendőek.

Például:

Komárom – Esztergom megye munkaerőpiacán a géplakatosok iránti kereslet az

$$y = -\frac{1}{24} \cdot x + 2$$

függvénnyel jellemezhető $x > 10$ esetén, a kínálatot pedig az

$$y = -\frac{1}{72} \cdot x$$

függvény írja le ugyanazon feltétel mellett. y a létszámot jelöli ezer főben, x pedig a havi bruttó bért ezer forintban.

a) Határozd meg, hogy 18000 Ft -os bér esetén mennyi a munkára jelentkezők száma? Hány embernek kínálnak ekkor munkát?

b) Állapítsd meg az egyensúlyi bért, és add meg, hogy ekkor hány ember dolgozik a szakmájában!

c) Határozd meg, hogy 45000 Ft-os bér esetén hány ember jelentkezik munkára, és mennyi ekkor a foglalkoztatottak száma! A kettő különbségeként megkapod 45000 Ft-os munkabér esetén a munka nélküli géplakatosok számát Komárom – Esztergom megyében.

Befektetések kezelése, kötelezettségek menedzselése

A befektetések és kötelezettségek menedzselése a matematika tananyagából legtöbbször csak a százalékszámítás, a kamat- és kamatoskamat-számítás ismeretét igényli. Viszont az ilyen feladatok megoldásához szükséges pénzpiaci, érétkpapírpiaci fogalmak, lehetőségek ismerete, valamint az adójogszabályok korlátozó (eredménycsökkentő) hatásának figyelembevétele lényegesen túlmutat a mindenkitől elvárható ismeretek körén.

Például:

Valaki a bérlet olyan speciális változatával (lízingelve) szándékozik egy három és félmillió értékű gépkocsihoz hozzájutni, amelynél a bérbeadó lehetőséget biztosít a bérbevevőnek az eszköz megvásárlására a bérlet lejártával. A lízinget adó cégek nem a kiskereskedelmi áron értékesítik áruikat, hanem a készpénzfizetés összegétől és a törlesztés időtartamától függően bizonyos százalékkal csökkentik vagy növelik az árat. Ezt a megváltozott összeget megadó százaléklábat nevezik lízingszorzónak, amely esetünkben 125. Az autó kiskereskedelmi árának hány százalékát kell az első alkalommal kifizetni, ha tudjuk, hogy a megállapodás szerint mindegyik törlesztő részlet fele az előző részletnek, és a tizedik alkalommal a vevő teljesen kifizette az autót?

Közgazdasági ismeretek felhasználását igénylő feladatok

A közgazdasági ismeretek felhasználását igénylő feladatok közgazdasági, illetve kereskedelmi szakközépiskolák 11. és 12. évfolyamán tanuló diákoknál alkalmazhatók, hiszen ezek a feladatok előzetes mikroökonómia és makroökonómia ismereteket igényelnek. Főként ebben rejlik a feladatok nehézsége.

A matematika tananyagból függvényanalízist, egyenletek (első- és másodfokú) megoldását, százalékszámítást, kamatszámítást érintik az ilyen feladatok.

A feladatokban szereplő közgazdasági fogalmakat a feladat kitűzésekor definiálva esetleg előismeretekkel nem rendelkező tanulók is foglalkozhatnak ebbe a típusba tartozó feladatokkal.

Például:

A fogyasztói teret koordináta-rendszerben ábrázolva, azt az árak és a jövedelem kettévágja megvehető és nem megvehető fogyasztói kosarakra. Ez az elválasztó alakzat a költségvetési egyenes.

Egy fogyasztó havonta 7500 Ft-ot költ X és Y termékre. Ha a fenti összeget teljes egészében az X termékre költi, X adott ára mellett e termékből maximum 75 db-ot vásárolhat. Az Y termék egységára 150 Ft. Ezen feltételek mellett a fogyasztó optimális termékkosarában 35 db X termék van.

Írja fel a költségvetési egyenes egyenletét, és jelölje A ponttal az optimális termékkombinációt!

Hivatkozások

[1] Csapó Benő (szerkesztő): Az iskolai tudás, Osiris Kiadó, 1998.

[2] Dombi János: Megtanult és megértett matematika tudás, Megjelent: Csapó Benő (szerkesztő): Az iskolai tudás, Osiris Kiadó, 1998. 174. old.

[3] Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, (Gimes Györgyné szerk.), Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1997. (16. kiadás), rsz: 81307, 340., 345., 349., 351., 352., 354. old.

Irodalom

[1] Dr. Ambrus András – Dr. David Gunter: Matematikai tételek megsejtését szolgáló reduktív eljárások, A Matematika Tanítása, 1984. 3. szám 68-81. old.

[2] Bevezetés a közgazdaságtanba I. Alapfogalmak és mikroökonómia, Dr. Nagy András (szerk.), PSZF, Budapest, 1995.

[3] Gacsályi – Meyer – Misz – Simonits: Közgazdaságtan II., Makroökonómia, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 5. Kiadás 1996. 19-21. old.

[4] Dr. Gerőcs László: Irány az egyetem! Matematika 30 feladatsor matematikából felvételizőknek

[5] Kopányi – Petró – Vági: Közgazdaságtan I. Mikroökonómia, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1992

Csete Lajos

Kiss Sándor: A háromszög nevezetes körei c. könyvről

A könyv alcíme: *Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal.* Kiadta az Erdélyi Tankönyvtanács a 209 oldalas művet 150 példányban kézirat gyanánt Kolozsvárott 1999-ben. A szerző *A Matematika Tanítása* című folyóiratból is ismert kiváló feladatmegoldó szatmárnémeti Kiss Sándor, a matematika tanára.

A mű három fejezetre oszlik, az 1. fejezetben a ferdeszögű (affin) koordináta-rendszerekkel ismerkedünk meg. Itt lényegében ferdeszögű koordinátageometria van kidolgozva, a középiskolában megismert derékszögű koordináta-geometriai tételek levezetése ferdeszögű rendszerben. A fejezet végén megoldott feladatok, egyszerűbb és ismertebb feladatok mellett például Routh tétele. Majd egy sor kitűzött feladaton keresztül magunk is begyakorolhatjuk az előzőekben megtanult módszereket.

A 2. fejezet a könyv gerince és legfőbb része: A háromszög nevezetes körei.

Az ismert körülírt, beírt, hozzáírt körök egyenleteinek levezetése, a sugarak és a középpontok kiszámítása, a külső és belső szögfelezők egyenletei.

Majd jönnek a kevésbé ismert dolgok: A háromszög Gergonne-féle pontja és ennek adjungált pontjai és a háromszög Nagel-féle pontja, ezek koordinátái és néhány tulajdonsága.

A háromszög kilencpontos köre, amelyet neveznek Euler-féle körnek és nálunk gyakrabban Feuerbach-féle körnek. Az Euler-egyenes és a második Euler-egyenes egyenlete. A háromszög ismert Apollóniosz-körei és ezek egyenletei. A magyar nyelvű szakirodalomban általam mintha eddig még nem olvasott érdekes Tucker-féle és Lemoine-féle körök és ezek egyenletei. A Taylor-féle kör és a Brocard-féle kör, a háromszög adjungált körei. A Brocard-féle pontok, a Brocard-féle szögek. A kissé ismertebb Soddy-féle körök.

E fejezet után is megoldott feladatok találhatók különböző folyóiratokból, matematikai versenyekről.

A 3. fejezet a háromszög nevezetes pontjaival foglalkozik az ismert és kevésbé ismert pontok koordinátáinak meghatározásával, illetve fontos szakaszok hosszának és érdekes háromszögek területének kiszámításával végzi a könyv.

Az irodalomjegyzék áttekintésével megállapíthatjuk, hogy főleg román és magyar szakirodalmat sorol fel a szerző. A román szakirodalmat nem ismerve is megállapíthatjuk, hogy a háromszög-geometriát tekintve a román szakirodalom bővebb a magyarnál. Gondolom, a románok a hagyományaik alapján sokat merítettek az 1800-as kiváló francia háromszög-geometriából.

Úgy tűnik különben, hagy a kissé leírt háromszög-geometria fejlődésnek indult, persze ez főleg angol nyelvű cikkekben és könyvekben található. Százával írnak le új nevezetes pontokat, nevezetes egyeneseket és nevezetes köröket. Csirmaz László egy KöMaL-beli cikke után (Hány nevezetes pontja van egy háromszög-

nek? 1984/10.) világos, hogy végtelen sok nevezetes pontról is lehet szó.

A könyv előszavában dr. Orbán Béla egyetemi tanár is megemlíti, hogy a háromszöggeometria vizsgálatában még jobb eszköz lenne a projektív háromszög-koordináták használata. Ámde ez a középiskolától távolabb áll.

Mindenesetre alkalmas lenne egy magyar nyelvű könyv a Möbias által kieszelt homogén koordináták háromszög-geometriai alkalmazásáról. Lehet, hogy a szintetikus geometria szebb, mint az analitikus, de úgy gondolom, hogy a számítógép-algebrai programmal támogatott analitikus geometria átütőbb erejű, ha újszerű vagy új dolgokat vizsgálunk.

Visszakanyarodva a könyvhöz, mivel igen kiváló könyvnek tartom, ezért érdemes lenne a tartalomjegyzéket a könyv végéről az elejére helyezni. Másrészt a példányszámot kissé megnövelni az új kiadásnál. A könyv nyelvezete korrekt és pontos. Kissé vitatkozni lehetne a szimedián szón, bizonnyal a románok és a franciák egy m-mel írják. Már A Matematika Tanításában is szerepelt így dr. Gerőcs László tanár úr egy cikkében. Ellenben korábban a KöMaL-ban dr. Surányi László tanár úr : A háromszög kevésbé ismert fontos pontjairól II. cikkében a szimmedián szó két m-mel szerepel. (KöMaL, 1987/8-9., 343. oldal) Az angolszászok szintén két m-mel írják. Javaslatom, írjuk két m-mel a szimmediánt, nem azért, mert az angol nyelvűek symmedian-nak írják, hanem azért, mert a fogalom szoros kapcsolatban van a szimmetriával, hiszen: „Az ABC háromszög valamely csúcsához tartozó szimediánon az illető csúcson átmenő oldalfelezőnek az ugyanabból a csúcsból kiinduló belső szögfelező szerinti szimmetrikusát értjük." (97. oldal) (Itt az oldalfelezőn a súlyvonalat érti a szerző.)

A könyvben hatalmas munka fekszik, rengeteg képlet, egyenlet, összefüggés a háromszöggeometriából és a trigonometriából, így alkalmas referenciaként is.

Felhívás!

Vegyen részt ön is a Bakos Tibor Matematikai Gyűjtemény munkájában!

Engedje meg a kedves Olvasó, hogy először néhány szóval megemlékezzünk a gyűjtemény névadójáról, Bakos Tiborról, s ezután röviden felvázoljuk a gyűjtemény jelenlegi helyzetét, majd végezetül szót ejtsünk terveinkről!

Lassan három éve már, hogy Bakos Tibor (1909 – 1998) nincs közöttünk. Emlékét, tanítását, az élethez, a munkához s a matematikához való hozzáállását mindannyian – akik kapcsolatban álltunk vele – magunkban hordozzuk. S ilyenek sokan vagyunk! Gondoljuk csak meg, hogy több mint negyven évig vett részt pl. a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztésében! Szerény ember volt, aki csendben munkálkodott a „Matematikatanítás" nemes ügyéért:

„ Az ifjúsággal megszerettetni, megtapasztaltatni a matematikát."

Többek között Bakos Tibor örököseinek hathatós támogatásával 2000 márciusában – mondhatni az ő munkásságának természetes

folytatásaként – egy olyan alapítványi keretek között működő interaktív gyűjteményt sikerült létrehozni, amely a matematika tanítását hatékonyan, a hétköznapi problémák szintjén is képes segíteni.

Célunk volt, hogy lehetőség szerint az ifjúság kötetlen formában is megszerezhesse a gyűjtemény révén az egyébként esetleg nehezen hozzáférhető matematikai tapasztalatokat. (Pl. „játszhasson" bizonyos matematikai eszközökkel, modellekkel...)

A matematika megismertetésének, megszerettetésének ügyében fáradozó sok száz, igen nehéz helyzetben lévő tanárkollégának, szakkörvezetőnek és nem utolsósorban szülőnek szeretnénk legalább szerény háttérbázist biztosítani. (Pl. azzal, hogy a gyűjtemény egyre bővülő kollekciójából egyes modelleket, játékokat, ábrákat lehessen kölcsönözni.)

Nagyon fontos momentum, hogy a kezdeményezésnek helyet adó ELTE Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén a leendő tanárokkal közvetlen napi kapcsolatban fejlődhet a gyűjtemény. Képzésük részévé válhat mindaz a többlet, amit itt kaphatnak, és az itt tapasztaltakat szertevihetik magukkal leendő iskoláikba.

Hihetetlen pazarlás, hogy a még napjainkban is világhírű, sőt világszínvonalú magyar matematika és matematikatanítás erőforrásai ennyire le vannak fojtva. Szinte már a világörökség részének mondható magyar nyelvű matematikai folyóiratok, matematikaversenyek, szakköri füzetek, kép- és hanganyagok sincsenek a kor, de legalább az oktatás jelenlegi színvonalának megfelelő módon feldolgozva és hozzáférhetővé téve.

Szerencsére Bakos Tibor (és reményeink szerint sok más matematikarajongó is) gyűjtötte, rendszerezte és megőrizte a számára érdekes matematikai alapanyagokat.

Az ő segítségével sikerült megtörni az e téren tapasztalható sok tíz éves csendet, amikor 1992-ben a KöMaL 100. évfordulójára készülve elhatároztuk annak CD-feldolgozását. Ekkor bocsátotta rendelkezésünkre pl. az 1940 – es években a KöMaL újjáéledését biztosító SZEGEDI ÍVEKET.

Az egyetemi és főiskolai hallgatók nálunk már eddig is hozzáférhettek többek között a „Matematika Tanítása", KöMaL, „Matematikai Lapok", Mathematikai és Phisikai Lapok első 48,107, 50, ill. 50 évének összesítő tartalomjegyzékéhez és még sok ritkasághoz.

Távlati céljaink között szerepel az ehhez hasonló matematikai forrásanyagok minél teljesebb körű feldolgozása, CD –n és az interneten való korlátlan hozzáférhetőségének „kierőszakolása". Tudva azt., hogy pl. egy diplomamunka, egy TDK- vagy szakdolgozat, egy tudományos cikk, de akár egy iskolai beadandó dolgozat megírásához milyen hasznos lenne ennek megléte.

Gyűjteményünk segítőtársakat keres, gyűjti a témával kapcsolatos igényeket, kéréseket, ötleteket.

Kérjük, segítsen ezeket eljuttatni hozzánk!

Felmerült pl. az az igény, hogy a tanítási órákon hasznosnak bizonyult, de reálisan nem hozzáférhető, esetleg nehezen előállítható bizonyos matematikai eszközöket, modelleket, demonstrációs ábrákat ...kölcsönözni lehessen, hogy minél több ilyen és ehhez hasonló igényt ki tudjunk elégíteni, kérjük támogassa munkánkat tudásával, információkkal, esetleg munkájával és lehetőség szerint adományaival is!

Címünk: ELTE TFK Matematika Tanszék, Bakos Tibor Matematikai Gyűjtemény, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C

Levélcím: 1518 Budapest, Pf. 120

(Hamarosan közzétehetjük majd e-mail címünket és számlaszámunkat is!)

Holló-Szabó Ferenc
A Bakos Tibor Mat. Gyűjt. ügyvivője

Pintér Klára

Sokszínű matematika 6. osztály

A MOZAIK Kiadó matematika tankönyvcsaládjában elkészült a 6. osztályos tankönyv és munkafüzet is. Az 5. osztályos tankönyv és munkafüzet folytatásaként a kerettantervhez illeszkedik a tankönyv. A kerettanterv témáit a **spirális felépítés** jegyében dolgoztuk fel úgy, hogy minden anyagrészt igyekeztünk megfelelő életkorban, megfelelő előkészítéssel tárgyalni. Ekkor ezt megtanítjuk, és a későbbiekben az alkalmazások során mélyítjük el az ismereteket, így a tantárgyon belül folyamatosan előkerülnek a korábbi ismeretek. Például a térgeometriára az 5. osztályban nagy figyelmet fordítottunk, különösen a térszemlélet fejlesztésére a szükséges számolási feladatok mellett. A 6. osztályban nem foglalkozik külön fejezet a térgeometriával, az egyéb anyagrészek feladatanyagában viszont mindenütt szerepelnek ilyen típusú feladatok. A gondolkodási módszerek, sorozatok olyan témák, amelyek feldolgozását nem külön fejezetben, hanem folyamatosan végezzük.

A matematika tanítás a tankönyv szerint **induktív módszer**rel történik, az ismereteket példákon keresztül szemléletesen vezetjük be. Törekedtünk arra, hogy reális feladatokat adjunk a gyerekeknek, melyek szövege is figyelemfelkeltő, **kapcsolódik a mindennapi élethez,** a többi tantárgy tanulása közben szerzett ismeretekhez.

A fejezetek:

1. Számelmélet
2. Hogyan oldjunk meg feladatokat
3. Racionális számok
4. Tengelyes tükrözés
5. Síkidomok, szerkesztések
6. Arányosság
7. Százalékszámítás
8. Valószínűség, statisztika
9. Számrendszerek

A 6. osztályos matematika tananyag első fejezetének azért választottuk a **Számelmélet**et, mert a tanulók számára ismerős számhalmazon, a természetes számok halmazán dolgozik, ami a tanév elején alkalmas az ismeretek felelevenítésére, szintetizálására, bővítésére. A számelmélet érdekes és színes, leköti a tanulók figyelmét. A számelmélet anyagrészt a kerettantervtől eltérően nem bontjuk szét, a 6. osztályban megtanítjuk a 10-zel, 2-vel, 5-tel, 100-zal, 4-gyel, 25-tel való oszthatóság mellett a 3-mal, 9-cel, 6-tal, 8-cal, 125-tel való oszthatóságot is. Szerepel a prímtényezős felbontás, és a relatív prímek fogalma is. A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös bevezetése a tapasztalatból kiindulva a fogalmak nevén alapul.

A **Hogyan oldjunk meg feladatokat** fejezet a szöveges feladatok megoldását tanítja következtetéssel. 6. osztályban algebrai kifejezések nélkül nem reális az egyenletrendezés, és így az egyenletmegoldás tanítása. A gondolkodásfejlesztés, szövegértés tanítása szempontjából nagyon fontosnak tartjuk, hogy a gyerekek egyenletek nélkül is tanuljanak problémákat megoldani. A fejezet követi a problémamegoldás Pólya-féle lépéseit: A kérdés, az adatok vizsgálata; Összefüggések keresése; Válaszadás; Ellenőrzés. Olyan példákat adunk a gyerekeknek, melyekben ki kell választani az azonos jelentésű kérdéseket, vagy nekik kell megfogalmazniuk

a kérdéseket. Találnak olyan feladatokat, melyekben felesleges adatok szerepelnek, illetve ki kell választani az összetartozó adatokat. Ilyen típusú feladatok más anyagrészeknél is tudatosan előfordulnak, amikor nem feltétlenül számítanak rá a gyerekek. Az összefüggések keresésénél két fontos módszert helyeztünk előtérbe, a visszafele gondolkodást és a szöveghez ábra rajzolását, amelyről már leolvasható a megoldás. Ezek a későbbiekben nagymértékben megkönnyítik az arányosság, a százalékszámítás tanítását, majd következő évben az egyenletek felírását. Az ellenőrzés fontossága különösen a számológépek használata következtében nő meg, ugyanis olyan módszereket kell tanítanunk a gyerekeknek, amikkel észrevehetők a hibák, azaz nagyon lényeges a becslés, figyelhetjük a végződéseket, osztási maradékokat. A gyerekek többsége számára szokatlan, ha egy feladatnak van több megoldása, vagy egyáltalán nincs megoldása.

A **Racionális számok** fejezet rendszerezi és kiegészíti a számolással kapcsolatos ismereteket, szép példáját adva annak, hogyan lehet kicsit magasabb szinten tárgyalni, áttekinteni az előző évben tanultakat.

A **Tengelyes tükrözés** és a **Síkidomok, szerkesztések** fejezetek nagyon szemléletesen vezetik be a geometriai fogalmakat, eljárásokat.

Az **Arányosság** és a **Százalékszámítás** témakörök is azt a szemléletet tükrözik, hogy következtetéssel, gondolkodva oldják meg a feladatokat a gyerekek a törtrész fogalma alapján, nem pedig formálisan, képletszerűen, algoritmust követve.

A **Valószínűség, statisztika** fejezet jó lehetőség a valószínűség, a biztos, lehetetlen események fogalmának alapozása mellett a gondolkodási módszerek fejlesztésére, a skatulya elv, a tagadás egyszerű alkalmazására. Az átlagszámítás a számolás gyakorlását, a grafikonok a függvényfogalom előkészítését teszik lehetővé.

A **Számrendszerek** fejezet kiegészítő anyag, heti 3 órában sajnos nem marad rá idő. Mégis nagyon fontosnak tartjuk a számolási algoritmusok, oszthatósági szabályok alkalmazását 5-ös, 12-es számrendszerben, amivel tudatosulnak a 10-es számrendszerben természetes ismeretek.

A tankönyv szerkezete világos, áttekinthető. A fejezetek látványos nyitó oldallal kezdődnek, a lapok szélén szín jelzi a megfelelő fejezeteket. A tananyag feldolgozása sok színes képpel, ábrával történik, a példákat, megtanulandó fontos ismereteket, megjegyzéseket színekkel, eltérő szedéssel különítjük el.

A tankönyv **egyaránt használható akár heti 3, akár 4 órában tanítják a matematikát.** A magasabb óraszám ugyanis nem a tananyag bővítését, hanem elmélyítését kell hogy szolgálja, és erre megfelelő, **bőséges feladatanyag** található a tankönyvben. Minden lecke végén legalább 10-15 feladat található, természetesen nem azzal az igénnyel, hogy mindegyiket megoldják a tanulók. Az első néhány feladat az alapvető ismereteket gyakoroltatja, ezek azok, amelyeket jó lenne, ha mindenki elsajátítana. Utána olyan feladatok következnek, melyek az előzőeknél kicsit bonyolultabbak, végül esetleg lehet olyan, amely a tehetségesebb gyerekeknek szól. A feladatok nehezedését színárnyalatok jelzik. A **gyerekek és szülők számára segítség** a feladatok mellett sok helyen található **súgó,** amely a feladathoz szükséges ismeretet nyújtja, vagy mintát mutat a megoldáshoz.

Minden lecke végén **rejtvény** található, amely a figyelemfelkeltésen, a motiváláson túl fontos feladatot tölt be a gondolkodás fejlesztésében, amennyiben fejleszti a gyerekek divergens gondolkodását, felhívja a figyelmet a pontos fogalmazásra.

A fejezetek végén összefoglaló feladatok találhatók, melyek olyan problémákat tartalmaz-

nak, amelyek részben átismétlik, részben szintetizálják a fejezetben tanult ismereteket.

Beszerezhetők a tankönyvhöz kapcsolódó **témazáró feladatlapok.**

A **munkafüzet** célja a gyakorlás, a tanulók motiválása, manipuláltatása, a tanár munkájának megkönnyítése. A munkafüzetbe azok a feladatok kerültek, melyek kitöltést, belerajzolást igényelnek, így a sokszor unalmas gyakorlás is érdekesebbé tehető. Például a koordináta-rendszerek megrajzolásával sok időt nyerhetünk, hiszen a gyerekeknek kevesebbet kell írniuk, rajzolniuk.

A tankönyvhöz és a munkafüzethez hasznos segédanyag az **Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából 10-14 éveseknek.**

A tankönyvhöz és munkafüzethez **tanári segédkönyv** készül, mely „széles margóval" tartalmazza a gyerek tankönyvét a feladatokhoz odaírva a megoldást, továbbá módszertani megjegyzéseket, esetleg rávezető feladatokat a margón. Ez megkönnyíti a tanár számára a tananyag feldolgozását, a házi feladatok kiválasztását, ellenőrzését.

A tankönyvhöz készül tehetséges tanulók számára a Töprengő folytatásaként szakköri feladatgyűjtemény.

Egyedülálló a Mozaik Kiadó vállalkozása, hogy nemcsak egy évfolyamon belül törekszik a matematika tanításához szükséges összes segédanyag kiadására, hanem az általános iskola 1. osztályától a középiskola 12. osztályáig kínál egységes szellemű, modern, szép matematika tankönyveket is, melyek reméljük tanulóknak, tanároknak egyaránt örömet szereznek.

A szerzők – Csordás Mihály, Konfár László, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vincze Istvánné – nevében örömteli matematikatanítást kíván: *Pintér Klára*

Vincze István

Gondolatok a matematika-tankönyvekről egy megjelenő tankönyvcsalád kapcsán Sokszínű matematika 10.

Mindannyiunkban él valamilyen emlék abból az időből, amikor az iskolában az egyik óráról a másikra készülve otthon a kezünkbe vettük a tankönyvet remélve, hogy valamilyen instrukciót kapunk az órán elhangzott problémák megoldásához.

Voltak olyan tantárgyak, amelyek jellegüknél fogva elsősorban lexikális ismereteinket gyarapították. Az óra anyagát a tankönyvből bármikor fel lehetett idézni, a tanári magyarázat ugyanis ezek alapján épült fel. Egy idegen nyelv tanulása során az adott lecke teljes egészében kitöltötte az órai munkát, a hozzá kapcsolódó gyakorlatok pedig minden esetben alapot szolgáltattak az otthoni gyakorlásokhoz és a megtanulandó anyagrészek rögzítéséhez.

Ezzel szemben voltak olyan tárgyak – és ezek között a legmarkánsabb a matematika volt –, melyeknek tankönyveiről csak nagyon halvány emlékképek maradtak meg. Ezzel szemben ma is gyakran emlegetünk elhíresült feladatgyűjteményeket. Ki ne hallott volna a *Laricsev* példa-

tárról, vagy az utóbbi évek során újra a könyvesboltok polcaira kerülő *Skljarszkij-Csencov-Jaglom* feladatgyűjteményekről, vagy az érettségin használt *zöld könyvről*. Ezzel szemben a matematika-tankönyvek a ködös múlt homályába bújnak meg.

Vajon mi lehet ennek az oka?

Az egyik legalapvetőbb indok talán az, hogy ez az a tudományterület, amely problémák nélkül nem tanítható. Arról szól szinte minden fejezete, hogy az emberiség története során, ha felmerültek kérdések, akkor azt milyen módon sikerült megoldani. Ezt a felmerülő problémák ismerete nélkül nem lehet megtanítani. Ha pedig birtokába jutunk a módszernek, akkor ennek az elmélyítéshez azt alkalmazni kell, és az alkalmazáshoz pedig újabb és újabb feladatokra van szükség. Ezeket pedig a feladatgyűjtemények biztosíthatják számunkra. Azaz egy diák legtöbbet ezzel találkozik matematikai tanulmányai során.

No, de a módszerek megértése, a fogalmak rögzítése nem könnyű feladat. Nem biztos, hogy az órai magyarázat alapján minden diák világos és egyértelmű ismeretekhez jut. Akkor miért nem forgattuk sűrűbben mégis ezeket a tankönyveket?

Van ennek egy nagyon prózai és nagyon emberi oka is. Azt hiszem, hogy bennünket annak idején matematikára oktatók többsége, velünk most gyakorló pedagógusokkal együtt úgy gondolhatta, hogy a tankönyvben található feladatokat az adott témakör tanítása során felhasználni nem túl szerencsés dolog. Ezek megoldását 'csak' ki kell olvasni a tankönyvből, és nem igényel semmiféle kreativitást.

Ezért a tanórán gyakran olyan feladatok kerültek elő, amelyek megoldása a könyvekben nem található meg. Emiatt egy olyan kötődés szakadt szét az órai munka és az otthoni tanulás között, amely ismét a tankönyv rovására történt. Nem volt értelme átolvasni az adott fejezetet, hiszen nem voltak ismerősek azok a rutinok, algoritmusok, amelyek az adott témakörhöz tartoztak. Egy gyengébb képességű diák számára ezek az addig nem tárgyalt feladatok nem tudtak igazán nagy segítséget nyújtani.

A most útjára induló tankönyvcsalád tervezése során e gondolatok alapján fogalmazódott meg a cél, hogy milyen tankönyvet szeretnénk a kollégák kezébe adni. A legfontosabb szempontok a következők voltak:

– A könyv feleljen meg a kerettanterv előírásainak. Természetesen figyelembe véve azt a lehetőséget is, hogy az adott iskolatípusokban felhasználható óraszámok eltérhetnek, hiszen ez a helyi pedagógiai programok függvénye. Vagyis lehetősége legyen a könyv használatára az alapóraszám felett tanítók számára is, de egyértelmű legyen a megtanítandó tananyag mindenki számára.

– Az egyes fogalmak, témakörök ismertetése legyen minél egyszerűbb, lehetőleg kerülve a terjengős magyarázatokat. A felhasznált mintapéldák ezek elmélyítését szolgálják.

– A fejezetekhez szervesen kapcsolódjon olyan minőségű és mennyiségű feladatanyag, amely a begyakorlást és az otthoni munka megszervezését is alkalmassá teszi. Ezek tegyék lehetővé a megfelelő algoritmusok kialakítását, ugyanakkor arra is teremtsenek lehetőséget, hogy a jobb képességű diákok is találhassanak nekik megfelelő feladatokat.

– A tankönyvet használó tanárok kapjanak megfelelő háttéranyagot az órai munkán kívül az otthoni feladatok kijelöléséhez is. Derüljön ki az is, hogy a matematika története az emberiség kultúrtörténetének szerves része, és fontosabb

pillanatai kerüljenek megemlítésre a hozzá tartozó fejezeteknél.

– Végül, de nem utolsósorban a könyv legyen 'szimpatikus' a megcélzott korosztály számára. Feladatai között szerepeljenek olyanok, amelyek felkeltik a diákok érdeklődését, és önálló munkára sarkallják őket. Szerkezete legyen könnyen áttekinthető, küllemében legyen esztétikus.

Ezen elképzelések alapján elkészülő tankönyv főbb fejezetei:

I. Gondolkodási módszerek *(Szükséges és elégséges feltételek, skatulya elv, sorbarendezési problémák.)*

II. Racionális és irracionális kifejezések. *(Racionális és irracionális számok, a négyzetgyökvonás azonosságai, az n-dik gyök fogalma és azonosságai.)*

III. A másodfokú egyenlet *(A megoldóképlet, gyökök és együtthatók közötti összefüggések, irracionális egyenletek, magasabb fokszámú egyenletek, a számtani és a mértani közép.)*

IV. Geometria *(Körrel kapcsolatos ismeretek, hasonlósági transzformáció és alkalmazásai, hegyesszögek szögfüggvényei, vektorok.)*

V. Szögfüggvények *(A szögfüggvényfogalom általánosítása, szögfüggvények grafikonjai, egyszerű trigonometrikus egyenletek.)*

VI. Valószínűségszámítás *(Események, műveletek eseményekkel, az eseménytér, klasszikus valószínűségi mező.)*

Néhány példa a könyvből:

1. *A Falábúak és a Kurtalábúak futballmérkőzést játszottak, melyen semmi különleges esemény nem történt (mindkét csapat ott volt, a mérkőzés nem szakadt félbe stb.). Mit mondhatunk a mérkőzésről, ha a közvetítés végén a riporter következő mondatát halljuk:*

a) A Falábúak 1-gyel több gólt rúgtak az ellenfél kapujába, mint a Kurtalábúak.

b) A Falábúak szereztek egy gólt.

c) A Kurtalábúak egyik játékosát kiállították.

d) A Falábúak több gólt szereztek, mint a Kurtalábúak.

A feladat alapján tárgyalható, hogy mit jelent bizonyos feltétel elégséges, illetve szükséges volta. Mit jelent az, hogy egy feltétel szükséges és elégséges?

2. *Egy 2 m hosszú fonál segítségével képezzünk egy téglalapot! Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, ha azt akarjuk, hogy a terület maximális legyen?*

Számtani és mértani közép alkalmazásával megoldható feladat.

3. *Hol vannak a koordinátasíkon azok az (x;y) pontok, amelyeknek koordinátáira teljesül, hogy* $\mathbf{tgx = tgy}$.

A szögfüggvények periodikusságát kihangsúlyozó feladat.

4. *Egy pénzérmét háromszor egymás után feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három dobás közül legalább egy fej?*

Az elemi események vizsgálatával és a komplementer esemény tulajdonságával megoldható feladat.

A mintapéldák alapját adják a fejezetek végén található feladatok megoldási módszereinek.

Természetesen, mint minden tankönyv használatakor, úgy itt is fontos szerep jut az oktatást irányító pedagógusnak. A könyv szerzői remélik, hogy ezt a tankönyvet választók megelégedéssel használják majd, és ez a diákok teljesítményében is megmutatkozik majd.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2002. január 31.

185. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos háromszögszám négyzetének összege háromszögszám!

186. Jelölje az ABC háromszög területét T, a B és C csúcsokhoz tartozó súlyvonalak hosszát pedig rendre s_b és s_c. Mutassuk meg, hogy az s_b akkor és csak akkor merőleges s_c-re, ha $3T = 2s_bs_c$!

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

187. Igazoljuk, hogy ha az

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

egyenletnek van valós gyöke, akkor

$$a^2 + b^2 \geq 8 \ (a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R})!$$

188. Egy négyoldalú gúla alaplapja olyan húrnégyszög, amelynek oldalai valamilyen körüljárási irány szerint rendre 20, 15, 24, 7 cm hosszúak. A gúla magasságának talppontja az alaplap átlóinak metszéspontja. Mekkora magasság esetén lesz a gúla köré írt gömb térfogata a legkisebb?

Fitos László, Esztergom

189. Van-e olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre bármely valós x és y esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|?$$

USA Mathematical Olympiad, 2000

Feladatmegoldások (170-174. feladatok)

170. Egy nyári matematikatáborban 60 gyerek vesz részt. Tudjuk, hogy bármely 10 táborozó tanuló között van legalább 3 olyan, akik ugyanabban a faházban laknak. Igaz-e, hogy van olyan faház, amelyben legalább 15 táborozó lakik?

Megoldás: A válasz: Igaz.

Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy nincs olyan faház, amelyikben 15 vagy annál több tanuló lakik. Ha n azon faházak száma, amelyekben legalább két táborozó lakik, akkor $n \leq 4$, ugyanis ellenkező esetben 5 faházból két-két tanulót választva ellentmondásra jutnánk azzal a feltétellel, hogy bármely tíz tanuló között van három, akik ugyanazon faház lakói.

Ha $n < 4$, akkor legfeljebb $14 \cdot 3 = 42$ tanuló lakhatna olyan faházban, amelyben legalább ketten laknak, így 18 egyszemélyes háznak kellene lennie, ami szintén ellentmond a feltételnek.

Kaptuk tehát, hogy indirekt feltételünk csak $n = 4$ esetén teljesülhet. Ekkor viszont legalább $60 - 14 \cdot 4 = 4$ egyszemélyes háznak kellene lennie. Ekkor viszont ismét ellentmondásra jut-

nánk a feladat feltételével, ugyanis három kétszemélyes házból két-két tanulót választva négy egyszemélyes házban lakó tanulóhoz, tíz olyan tanulót kapnánk, akik között nincs három ugyanabban a házban lakó.

Indirekt feltételünk ellentmondásra vezetett, így biztosan van olyan faház, amelyikben legalább 15 tanuló lakik.

Több megoldás alapján

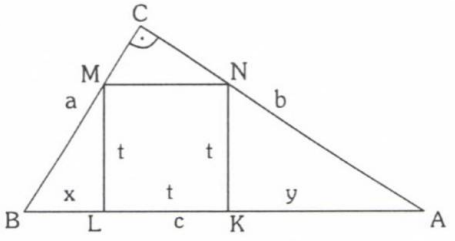
Megjegyzés: Az állítás a feladatban megadott feltételek mellett akkor is igaz marad, ha csak 58 táborozó van, de már 57 táborozó elhelyezhető négy 14 személyes és egy 1 személyes faházban úgy, hogy a feltétel bármely 10 tanuló esetén teljesüljön.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 8.

171. Melyik az a legkisebb egész oldalhosszúságú négyzet, amely köré úgy tudunk írni egy egész oldalhosszúságú derékszögű háromszöget, hogy a négyzet két csúcsa a háromszög átfogójára, másik két csúcsa egy-egy befogóra illeszkedik?

Megoldás: A megoldás során az *1. ábra* jelöléseit használjuk.



1. ábra

Bármely derékszögű háromszögbe csak egyféleképpen írható kívánt tulajdonságú négyzet. Előbb ennek oldalát határozzuk meg a derékszögű háromszög oldalainak függvényében.

Mivel $ABC_\Delta \sim MBC_\Delta \sim ANK_\Delta$, ezért

$\frac{a}{b}=\frac{x}{t}=\frac{t}{y}$, ahonnan $x=t\cdot\frac{a}{b}$ és $y=t\cdot\frac{b}{a}$.

Másrészt $c=x+t+y=t\cdot\left(\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}\right)$,

innen pedig

$$t=\frac{abc}{ab+c^2}$$

Olyan pitagoraszi számhármasokat keresünk tehát, amelyekre t egész és a legkisebb ilyen szám. Legyen $a = kp$, $b = kq$, $c = kr$, ahol k pozitív egész és $(p; q; r)=1$. Könnyen látható, hogy ekkor p, q és r páronként is relatív prím pozitív egész számok. Ezzel a helyettesítéssel

$$t=\frac{kpqr}{pq+r^2}.$$

t egész, ha $(pq + r^2) \mid kpqr$, ami, mivel $(p; q) = (q; r) = (r; p) = 1$, ekvivalens azzal, hogy $(pq + r^2) \mid k$. Adott (p, q, r) primitív pitagoraszi számhármas esetén t értéke akkor a legkisebb, ha $k = pq + r^2$, és ekkor $t = pqr$. Célunk tehát azon primitív pitagoraszi számhármas megkeresése, amelyre az oldalhosszak szorzata a legkisebb.

Ismert, hogy $p = m^2 - n^2$, $q = 2mn$, $r = m^2 + n^2$, ahol m és n különböző paritású, relatív prím pozitív egészek és $m > n$. Ebből az előállításból látszik, hogy pqr akkor a legkisebb, ha $m = 2$ és $n = 1$, azaz $p = 3$, $q = 4$, $r = 5$.

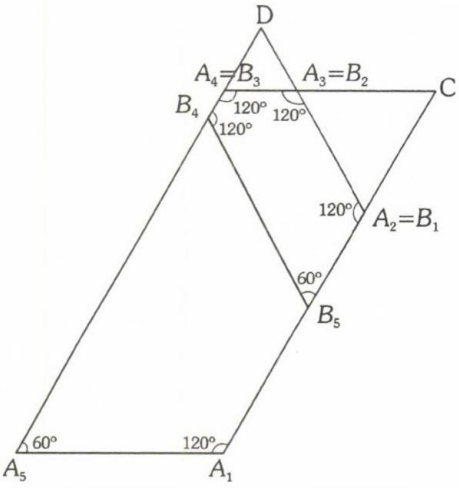
A fentiek alapján $t = 60$, $k = 37$, $a = 111$, $b = 148$, $c = 185$.

Dályay Pál Péter (Szeged) és Schmidt Edit (Budapest) megoldása alapján

A megoldók száma: 7.

172. Van-e olyan konvex ötszög, amelyet egyetlen egyenes vágással úgy tudunk két részre bontani, hogy az egyik rész az eredetihez hasonló ötszög?

I. megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan $A_1A_2A_3A_4A_5$ konvex ötszög, amelyet egyetlen vágással az óhajtott módon tudunk feldarabolni. A keletkező hasonló ötszög a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög, ahol $B_1 = A_2$, $B_2 = A_3$, $B_3 = A_4$, $B_4 \in A_4A_5$ és $B_5 \in A_1A_2$. *(2. ábra).*



2. ábra

Jelölje α_k az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ szögének, míg β_k a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög $B_{k-1}B_kB_{k+1}$ szögének mértékét, legyen továbbá $a_k = A_kA_{k+1}$, $b_k = B_kB_{k+1}$, ahol $k = 1, 2, ..., 5$, $A_6=A_1$, $B_6 = B_1$, $A_{-1} = A_5$, $B_{-1} = B_5$. Ezen feltételekkel látható, hogy $\beta_1 = \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_4$, $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$. A két ötszög hasonlóságából adódik, hogy $\alpha_k = \beta_k$ ($k=1, 2, ..., 5$), így $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$. Ugyancsak a hasonlóságból adódik, hogy

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5}, \qquad (1)$$

amiből a már felírt egyenlőségek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}.$$

A kívánt módon felbontható ötszögre tehát teljesülnie kell, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ és

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}.$$

Ezek a megfelelő ötszög létezésének tehát szükséges feltételei.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy létezik ilyen ötszög. Legyen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 120°$, és így $\alpha_5 = 60°$, valamint az A_1A_5 és A_3A_4, illetve az A_1A_2 és A_5A_4 egyenesek párhuzamosak. Az a_1, a_2, a_3 értékét válasszuk meg a fenti arányosságnak megfelelően úgy, hogy $a_1 > a_2 > a_3$ teljesüljön, legyen pl. $a_1 = 16$, $a_2 = 8$, $a_3 = 4$.

A következőkben azt igazoljuk, hogy ezen adatokkal megszerkeszthető az ötszög. Az A_2A_3 szakaszra a végpontokban szerkesszünk 120°-os szögeket, majd a szögszárakra mérjük fel az A_1A_2, illetve A_3A_4 szakaszokat. Ezek után szerkesszünk A_1-en keresztül az A_3A_4 egyenessel, A_4-en keresztül pedig az A_1A_2 egyenessel párhuzamost. A két párhuzamos metszéspontja lesz az A_5 csúcs. Válasszuk meg a B_k ($k = 1, 2, ..., 5$) pontokat a megoldás első részének megfelelően, azaz legyen $B_1 = A_2$, $B_2 = A_3$, $B_3 = A_4$, $B_4 \in A_4A_5$ és $B_5 \in A_1A_2$ úgy, hogy $A_4B_4 = 2$ teljesüljön ((1) alapján), és B_4B_5 párhuzamos legyen az A_2A_3 egyenessel. Ha C az A_1A_2 és A_3A_4, D pedig az A_2A_3 és A_5A_4 egyenesek metszéspontja, akkor az A_2A_3C háromszög szabályos, az $A_1CA_4A_5$ négyszög paralelogramma, így $a_5=a_2+a_3=12$ és $a_4=a_1+a_2=24$. Az A_3A_4D háromszög is szabályos és az $A_2DB_4B_5$ négyszög is paralelogramma, így $b_4=a_2+a_3=12$ és $b_5=a_3+b_3=6$. Könnyen látható, hogy $\alpha_k = \beta_k = 120°$ ($k = 1, 2, 3, 4$), $\alpha_5=\beta_5 = 60°$, $a_1= 16$, $a_2=8$, $a_3=4$, $a_4=24$, $a_5=12$, illetve $b_1 = a_2 =8$, $b_2 = a_3 =4$, $b_3 = A_4B_4 = 2$, $b_4 = 12$, $b_5 = 6$. A két ötszög tehát hasonló, a kisebbik ötszög a nagyobból a B_4B_5 egyenessel vágható le.

Megjegyzés: A szögek más megválasztása esetén is kaphatunk alkalmas ötszöget, pl. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 108°$ is megfelelő.

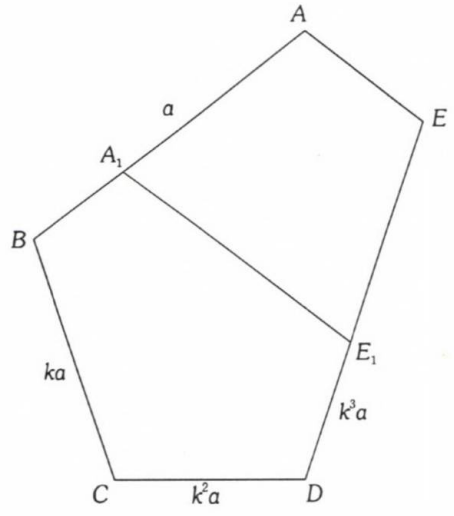
Dályay Pál Péter, Szeged

II. megoldás: Ebben a megoldásban egy olyan ötszöget konstruálunk, amelynek mindegyik belső szöge 108°-os. Ilyen „egyenlő szögű" ötszögekre előbb kimondunk két könnyen igazolható segédtételt. Az 1. segédtétel a 2. segédtétel igazolásához, a 2. segédtétel a megfelelő ötszög konstruálásához kell.

1. segédtétel: Ha két egyenlő szögű ötszög mindegyikében van három olyan egymást követő oldal, amelyekre teljesül, hogy a megfelelők rendre megegyeznek, akkor a két ötszög egybevágó.

2. segédtétel: Ha két egyenlő szögű ötszög mindegyikében van három olyan egymást követő oldal, amelyekre teljesül, hogy a megfelelő oldalak arányai rendre megegyeznek, akkor a két ötszög hasonló.

Legyen az *ABCDE* egyenlő szögű ötszög olyan, hogy $AB=a$, $BC=ka$ és $CD=k^2a$, ahol $\frac{2}{3} < k < 1$, és k rögzített *(3. ábra).*



3. ábra

Mivel $BC > CD$, ezért $DBC\sphericalangle < BDC\sphericalangle$. Így viszont $ABD\sphericalangle > EDB\sphericalangle$, ennélfogva $ED > AB$. Ezek alapján található ED-n egy olyan E_1 pont, amelyre $DE_1 = k^3a$. Az AB oldalon megfelelően megválasztva az A_1 pontot, a $BCDE_1A_1$ és $ABCDE$ ötszögek hasonlók.

Vörös Zoltán (Tiszavasvári) megoldása alapján

A megoldók száma: 2.

173. Mutassuk meg, hogy ha vannak olyan x, y, z pozitív egész számok, amelyekre

$$x^2 + y^2 + 1 = xyz,$$

akkor $z=3$! Határozzuk meg az összes megfelelő (x, y, z) pozitív egész számhármast!

Megoldás: A feladat első részében megfogalmazott állítás bizonyítása végett ad absurdum tegyük fel, hogy van a tekintett egyenletnek olyan pozitív egészekből álló megoldása, amelyben $z \neq 3$. Rögzítsünk egy ilyen z-t!

Ha a rögzített z mellett $x=y$ teljesülne, akkor $x=y=1$ és $z=3$ lenne a tekintett megoldás, ami a feltételünk értelmében nem lehet. Kaptuk, hogy ha $z \neq 3$, akkor $x \neq y$.

A szimmetria miatt feltehető, hogy $x<y$. Legyen $(x_0; y_0)$ az a megoldás, amelyben y_0 a legkisebb. (Ilyen van, hiszen bármely pozitív egészekből álló halmaznak van legkisebb eleme.) Egyenletünket alakítva kapjuk, hogy

$$0 = x_0^2 + y_0^2 + 1 - x_0y_0z =$$
$$= x_0^2 + (x_0z - y_0)^2 + 1 - x_0(x_0z - y_0)z,$$

ahonnan adódik, hogy az $y_1 = x_0$, $x_1 = x_0z_0 - y_0$ szintén megoldás, ha x_1 pozitív. Ez viszont teljesül, mivel

$$y_0(x_0z - y_0) = x_0^2 + 1 > 1 > 0.$$

Másrészt mivel $y_0 > x_0$, ezért

$$y_0(x_0z - y_0) = x_0^2 + 1 \leq x_0(x_0 + 1) < y_0(x_0 + 1).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $x_1 < y_1 + 1$, és mivel $x_1 = y_1$ nem lehet, ezért $x_1 < y_1$.

Találtunk tehát egy olyan $(x_1; y_1)$ megoldást, amely megfelel az $x < y$ feltételnek, viszont $y_1 = x_0 < y_0$, ami ellentmond y_0 minimalitásának. A kapott ellentmondás csak oly módon oldható fel, ha $z = 3$. Ezzel a feladat első részében megfogalmazott állítást beláttuk.

A továbbiakban meghatározzuk az

$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$

egyenlet összes megoldását. Világos, hogy $x = y = 1$ megoldása az egyenletnek.

Ha $(a; b)$ megoldása az egyenletnek $(a>b)$, akkor

$$b^2 + (3b-a)^2 + 1 = 3b(3b-a),$$

azaz a $(b;\ 3b-a)$ is megoldás. Mivel

$$(a-b)(a-2b) = a^2 - 3ab + 2b^2 = b^2 - 1 > 0,$$

ezért $a > 2b$, így $3b - a < b$. Kaptuk, hogy az így kapott megoldásokban b szigorúan csökken, ami azt jelenti, hogy a fenti helyettesítés véges sokszori alkalmazásával elérhető a $b = 1$ eset. Ekkor $a = 1$ vagy $a = 2$.

A fenti gondolatmenetből következik, hogy az összes megoldás az $a_1 = b_1 = 1$ kiinduló megoldásból az

$$(a_{n+1};\ b_{n+1}) = (3b_n;\ 3b_n - a_n)$$

rekurzióval kapható meg. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok ugyanannak a rekurzív definíciónak tesznek eleget, nevezetesen: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$ $(n > 2)$. Ez a rekurzió a Fibonacci-sorozat páratlan indexű tagjait állítja elő, azaz $n \geq 1$ esetén

$$(a_n;\ b_n) = (f_{2n+1};\ f_{2n-1}).$$

$z = 3$ mellett az egyenlet összes megoldása tehát:

$$(1;\ 1),\ (f_{2n+1};\ f_{2n-1}),\ (f_{2n-1};\ f_{2n+1})\ (n \geq 1).$$

Schmidt Edit (Budapest) és Tuzson Zoltán (Székelyudvarhely) megoldása alapján

A megoldók száma: 8.

174. Az $A_1A_2 \ldots A_n$ konvex sokszög A_kA_{k+1} oldalaira $(k = 1, 2, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1)$ kifelé szerkesszük meg az $A_kB_kA_{k+1}$ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy az $A_1A_2 \ldots A_n$ és $B_1B_2 \ldots B_n$ sokszögek súlypontja egybeesik!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A megoldás során fel fogjuk használni a következő, könnyen bizonyítható *tételt:* Ha $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ vektorok összege $\mathbf{v}$, akkor a $\mathbf{v_i}$ vektorok α szögű elforgatottjának összege a $\mathbf{v}$ α szögű elforgatottja. (Jelölés: $\mathbf{v}^{(\alpha)}$)

Az óramutató járásával megegyező irányban betűzött $A_1A_2 \ldots A_n$ konvex sokszög csúcsainak helyvektorai a sík egy O vonatkoztatási pontjára nézve $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$, a sokszög súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{s_A} = \frac{1}{n}(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_n}).$$

Hasonlóan a $B_1B_2 \ldots B_n$ sokszög csúcsainak helyvektorai O-ra nézve $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}$, a súlypont helyvektora

$$\mathbf{s_B} = \frac{1}{n}(\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + \ldots + \mathbf{b_n}).$$

Mivel $\mathbf{b_k} = \mathbf{a_k} + \overrightarrow{A_kB_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, ezért

$$\mathbf{s_B} = \frac{1}{n}(\mathbf{a_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \mathbf{a_n} + \overrightarrow{A_nB_n}) =$$

$$= \mathbf{s_A} + \frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}) \qquad (1)$$

A fenti tétel szerint

$$\overrightarrow{A_kB_k} = \overrightarrow{A_kB_{k+1}}^{(60^\circ)}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1)$, így

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} =$$

$$= (\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1})^{(60^\circ)} = \mathbf{0}^{(60^\circ)} = \mathbf{0}, \qquad (2)$$

hiszen $A_1A_2 \ldots A_n$ zárt sokszögvonal.

(2)-t (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{s_B} = \mathbf{s_A}$, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés: A kiinduló sokszög konvexsége azért kellett, hogy az $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_nB_nA_1$ háromszögek ne metszenek egymásba, azaz a $B_1B_2 \ldots B_n$ valóban sokszög legyen, ne csak sokszögvonal.

Schmidt Edit, Budapest

A megoldók száma: 7.

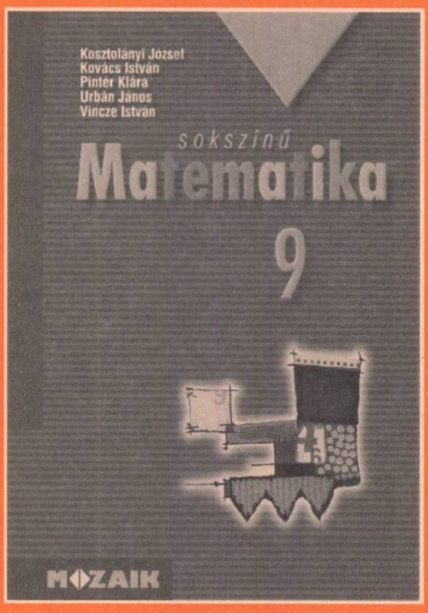
A megoldók névsora: Dályay Pál Péter, Szeged (170-174.); Fitos László, Esztergom (171.); László Sándor, Szombathely (170., 171., 173.); Nagy Béla, Sarkad (170., 173., 174.); Schmidt Edit, Budapest (170., 171., 173., 174.); Schuler László, Budapest (170., 171., 173., 174.); Simon József, Csíkszereda (170., 171., 173., 174.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (170., 173., 174.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (170-174.).

KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

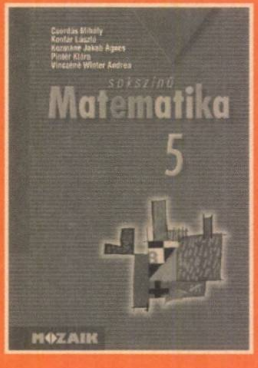
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

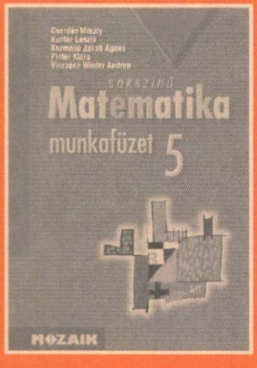
színes tankönyvsorozat 2001-ben az 5. és 9. osztályos kötetekkel indul. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.



A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

KÖNYVAJÁNLAT A MATEMATIKA TANÍTÁSÁHOZ





MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK